



Research article

First published online: December 28, 2022

Cinzia Di Palo*, Pierluigi Fava[◊]

ANALISI STOCASTICA DI UNA EMISSIONE IN VALUTA

Abstract.

This study analyses a potential investment by a possible pension investor in government bonds issued in foreign currency under a risk-return perspective. In particular, the government bond under study is the thirty-year Italy Govt ISIN US465410CC03, denominated in US dollars. By means of stochastic processes, the trend in the exchange rate between the two currencies the dollar and the euro is simulated to assess its impact on the yield to maturity of the government bond considered. The analysis involves determining the probabilities of obtaining a negative yield in the different simulation scenarios. In addition, there are also determined the probabilities of obtaining returns to maturity lower than those obtainable with a similar investment instrument denominated in euro.

Keywords: exchange rates, government bond, stochastic simulation.

* University of Cassino and Southern Lazio

[◊] Department of Methods and Models for Territory, Economics and Finance, Sapienza University of Rome, Italy

1 Introduzione

Il presente studio analizza sotto il profilo rischio-rendimento il potenziale investimento in titoli governativi emessi in valuta estera da parte di un Investitore Istituzionale di natura previdenziale. In particolare, l'analisi ha per oggetto il titolo trentennale Italy Govt ISIN US465410CC03 emesso il 27 aprile 2021 denominato in dollari statunitensi. Si ipotizza la natura previdenziale dell'Investitore Istituzionale e si assume che questo, in ottica di cash flow matching, detenga il titolo sino a scadenza e che, quindi, le variazioni di prezzo del titolo, apprezzate nel suo arco di vita, non ne influenzino il rendimento.

Il lavoro si sviluppa nel modo seguente. Nella sezione 2 è descritto il titolo Italy Govt ISIN US465410CC03, denominato in dollari statunitensi, oggetto del nostro studio e sono descritti i rischi connessi all'impatto che le variazioni del rapporto di cambio hanno sul titolo stesso. Nella sezione 3, attraverso processi stocastici, è sviluppata la simulazione dell'andamento del rapporto di cambio tra dollaro statunitense ed euro al fine di valutare come questo influenzi il rendimento a scadenza del titolo in esame. Infine, nella sezione 4 sono sintetizzati i principali risultati dell'analisi sviluppata.

2 Analisi dell'Emissione governativa

Con nota del 27 Aprile 2021 il Dipartimento del Tesoro del Ministero dell'Economia e delle Finanze italiano annunciava l'emissione per 1500 milioni di dollari statunitensi (USD) del titolo trentennale Italy Govt ISIN US465410CC03 (Italy Tf 3.875% Mg51 Usd), scadenza 6 maggio 2051 e tasso cedolare del 3,875% corrisposto con periodicità semestrale. Al prezzo di collocamento di 98,89 USD, il titolo corrispondeva un rendimento lordo all'emissione del 3,938%. Il titolo è classificato come debito senior emesso dalla Repubblica Italiana.

L'asta ha registrato domanda per 6,2 miliardi di dollari statunitensi con collocamento sindacale.

Se si confronta il rendimento a scadenza del titolo oggetto di analisi con un analogo strumento emesso in valuta domestica, per esempio il titolo trentennale ISIN IT0005425233 (Btp Tf 1,7% St51 Eur), scadenza 1 settembre 2051 e tasso cedolare dell'1,7%, anch'esso corrisposto con periodicità semestrale e classificato con medesima seniority, si osserva alla data di emissione del titolo in valuta, a parità di rischio di emittente, un differenziale in termini di rendimento annuale a scadenza di circa 200 bps (fonte Bloomberg) dovuto ai differenti tassi espressi dalla curva del Treasury USA¹.

In aggiunta, rispetto al Treasury trentennale classificato con rating AAA, il titolo Italy Govt ISIN US465410CC03 emesso in dollari statunitensi registra uno spread all'emissione di circa 160 bps (fonte Bloomberg). Tale spread riflette il rischio di credito della Repubblica Italiana rispetto agli Stati Uniti.

Tali differenziali suggeriscono di approfondire il profilo rischio-rendimento del titolo in esame. In generale, un investimento in un titolo denominato in valuta estera determina per il sottoscrittore l'esposizione al rischio di cambio. La posizione lunga su un titolo emesso in valuta estera è soggetta al rischio di un rafforzamento della valuta

¹ Sebbene il titolo sia emesso dalla Repubblica Italiana, una emissione in valuta estera deve considerare la curva dei rendimenti espressa dal Paese di riferimento della denominazione.

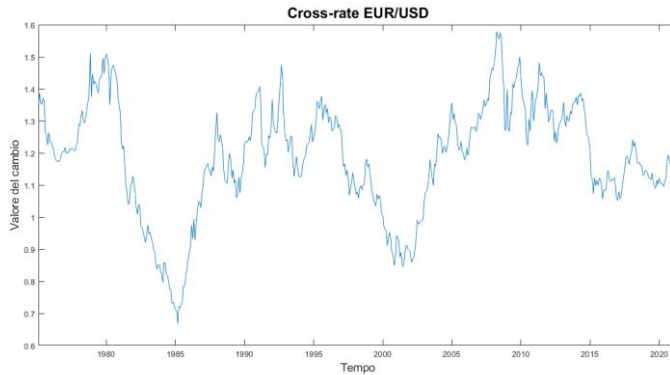
domestica, che si tradurrebbe in una riduzione del tasso interno di rendimento per via della riduzione degli importi associati al cash flow.

Pertanto, al fine di valutare il margine di profittabilità dell'investimento in funzione del rischio di cambio, analizziamo il Cross-rate Euro/Dollaro (EUR/USD), che coinvolge le valute delle due più sviluppate economie globali e risulta essere, in termini di volumi di negoziazione, la prima asset class su scala mondiale.

2.1 Analisi del Cross-rate Euro/Dollaro

La serie storica del rapporto di cambio EUR/USD dal 1975 ad oggi mostra un andamento ciclico, vedi Figura 1. In particolare, si registra un minimo di 0.66 a febbraio 1985 ed un massimo di 1.58 a marzo 2008.

Figura 1. Rapporto di cambio EUR/USD dal 1975 al 2021, con frequenza di rilevamento mensile (valutazione a fine mese)



Fonte: Elaborazione propria su dati Bloomberg

Secondo la teoria della Parità del Potere d'Acquisto (PPA) (Terborgh, 1926) è possibile stabilire se il livello corrente del Cross-rate sia allineato o meno al valore di equilibrio. La PPA definisce una condizione di assenza di arbitraggio affermando che due panieri di beni identici, venduti in paesi diversi, devono avere lo stesso prezzo una volta espressi in valuta comune.

Come dall'analisi del provider Bloomberg, con riferimento ai valori osservati a maggio 2021, si osserva che il Cross-rate EUR/USD appare sostanzialmente in equilibrio in quanto sul mercato si registra un rapporto di cambio EUR/USD pari a 1.22 (il valore teorico derivante dalla teoria della PPA è 1.20).

In virtù delle osservazioni di cui sopra, ritenendo "mature" entrambe le economie (europea e statunitense), si presuppone che eventuali oscillazioni anomale, sia in ampiezza che in velocità, del rapporto di cambio EUR/USD vengano considerate dalle rispettive Banche Centrali al fine di evitare il diffondersi di shock sull'economia reale.

3 Analisi quantitativa del rischio di cambio associato all'investimento

Nel prosieguo del lavoro viene considerata la serie storica del rapporto di cambio USD/EUR, in modo che un apprezzamento del dollaro rispetto all'euro si traduca in un rendimento positivo sull'investimento nel titolo Italy Govt ISIN US465410CC03 in dollari statunitensi.

In questa sezione, ai fini della valutazione del rischio di cambio associato all'investimento, si presenta prima l'analisi statistico/econometrica sulla serie storica del rapporto di cambio USD/EUR e quindi si descrivono brevemente i processi stocastici implementati e le relative calibrazioni per la simulazione del trend futuro del rapporto di cambio USD/EUR. Infine, si illustra la metodologia adottata per la valutazione del rischio di cambio sul titolo in esame.

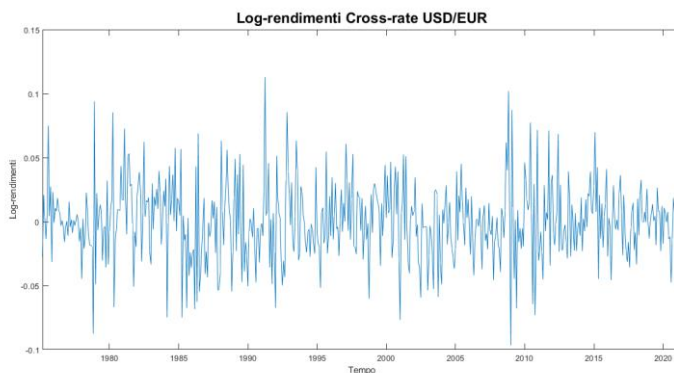
3.1 Analisi statistico/econometrica preliminare

Dal provider finanziario Bloomberg è stata ottenuta la serie storica del rapporto di cambio USD/EUR, con frequenza mensile, dal 31/01/1975 al 30/04/2021. La serie storica si compone di 556 osservazioni. Sono stati, quindi, calcolati i log-rendimenti del rapporto di cambio USD/EUR, con la formula

$$r_i = \ln\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, 555 \quad (1)$$

in cui x_i indica il rapporto di cambio USD/EUR al tempo i e x_{i-1} il valore dello stesso al mese precedente, vedi Figura 2.

Figura 2. Serie storica dei rendimenti logaritmici del rapporto di cambio USD/EUR dal 31 gennaio 1975 al 30 aprile 2021



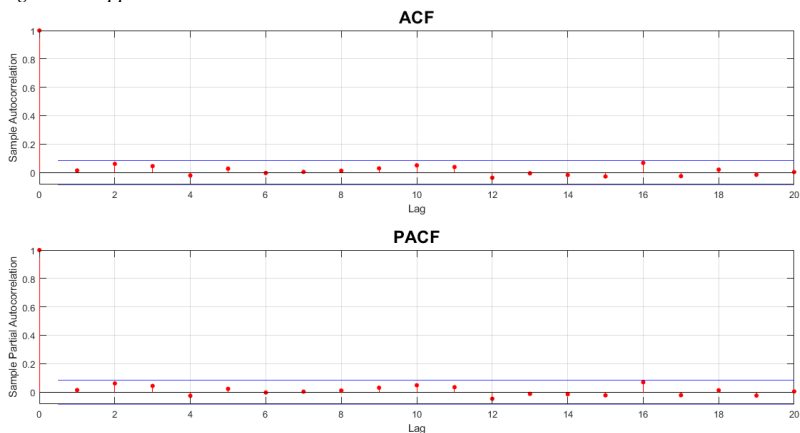
Fonte: Elaborazione propria su dati Bloomberg

La serie storica in esame presenta parametri di asimmetria e curtosi rispettivamente pari a 0.20 e 3.9, valori leggermente superiori rispettivamente a 0 e 3 caratteristici di

una distribuzione normale. Il risultato del test Jarque-Brera (1987) conferma, con p-value al 5%, il rifiuto della distribuzione normale per i rendimenti.

L'analisi dei residui, effettuata tramite rappresentazione grafica della funzione di autocorrelazione (ACF) e della funzione di autocorrelazione parziale (PACF), non mostra segni di autocorrelazione, vedi Figura 3. Il test econometrico di Ljung-Box (1978) con p-value al 5% indica di non poter rifiutare l'ipotesi nulla di non autocorrelazione dei residui.

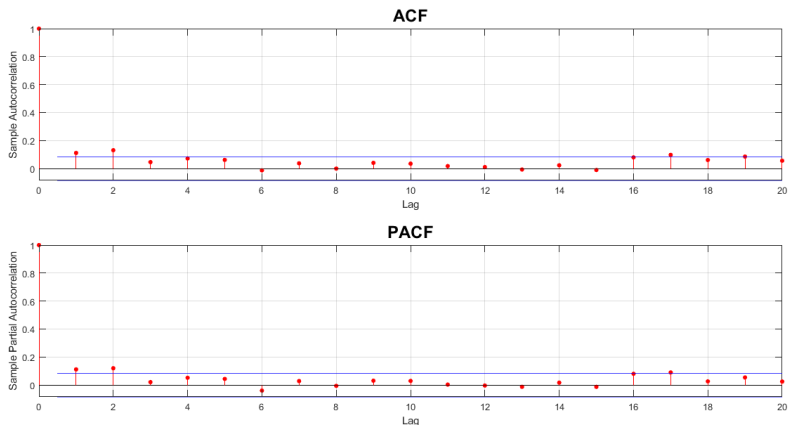
Figura 3. Rappresentazione della ACF e della PACF dei residui



Fonte: Elaborazione propria

Dall'analisi dei residui al quadrato, vedi Figura 4, si osserva la presenza di autocorrelazione in prossimità del primo e secondo lag, in cui si evidenzia una rottura delle bande di supporto, la quale suggerisce la presenza di *volatility cluster*.

Figura 4. Rappresentazione della ACF e della PACF del quadrato dei residui



Fonte: Elaborazione propria

Il test econometrico di Engle (1982) sui residui con p-value al 5% suggerisce la presenza di omoschedasticità nella volatilità.

3.2 Presentazione dei processi stocastici e calibrazioni

Questa sottosezione fornisce una breve descrizione dei processi stocastici utilizzati per simulare l'andamento del rapporto di cambio USD/EUR, al fine di valutarne il possibile impatto sul rendimento del titolo obbligazionario Italy Govt ISIN US465410CC03.

Per la descrizione dettagliata dei processi stocastici e delle relative funzioni di verosimiglianza utilizzate per la stima dei parametri si rimanda a Brigo et al. (2017).

3.2.1 Moto Browniano Geometrico

Il moto Browniano geometrico è il processo utilizzato per descrivere il comportamento casuale nel tempo del prezzo di un'azione (Hull, 2009). Indicato con S_t il prezzo dell'azione al tempo t , l'equazione differenziale stocastica che descrive il processo risulta essere:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dove i parametri μ (tasso di deriva) e σ (tasso di varianza) rappresentano, rispettivamente, il tasso di rendimento atteso e la volatilità del prezzo dell'azione, e dW_t è un moto Browniano standard (anche noto come processo di Wiener) caratterizzato da incrementi mutuamente indipendenti e distribuiti normalmente con media zero e devianza standard pari alla radice quadrata dell'incremento del tempo.

L'equazione continua del processo Browniano geometrico considerata tra due istanti discreti, t_i e t_{i+1} , ha per soluzione:

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma Z_{i+1} \sqrt{t_{i+1} - t_i}}$$

dove Z_1, Z_2, \dots, Z_n sono estrazioni casuali da una distribuzione normale standard.

Nella nostra simulazione, la variabile S_t denota il rapporto di cambio USD/EUR al tempo t . L'intervallo di tempo considerato è $[t_0, t_n]$, con t_0 e t_n fissati rispettivamente al 30 aprile 2021 e 31 maggio 2051. Poiché si considerano rilevazioni mensili del rapporto di cambio, gli istanti di tempo discreto t_i sono scelti in modo tale che $\Delta t = t_{i+1} - t_i = 1/12$ di anno per ogni i .

Per la stima dei parametri del processo, è stato utilizzato il metodo di massima verosimiglianza. Per questo processo, gli incrementi dei log-rendimenti sono variabili casuali normali, indipendenti e identicamente distribuite, ciascuna con funzione densità con media m e varianza v . Gli stimatori dei parametri del processo del moto Browniano geometrico sono calcolati come segue:

$$m = \left[\hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \right] \Delta t \quad v = \hat{\sigma}^2 \Delta t$$

Pertanto, questi sono ottenuti dalle stime dei parametri m e v . Per il processo Browniano geometrico, il metodo di massima verosimiglianza fornisce formule ben note in forma chiusa per media e varianza del campione dei log-rendimenti (vedi Brigo et al. 2007).

La funzione di log-verosimiglianza, denotata come $L^*(\mu, \sigma)$, è definita come:

$$L^*(\mu, \sigma) = n \log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi dt}}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{-\left(r_i - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt\right)^2}{2\sigma^2 dt}$$

dove n è il numero dei log-rendimenti mensili osservati, con $n = 555$, r_i indica l' i -esimo log-rendimento mensile osservato, vedi formula (1), e dt è posto uguale a $\frac{1}{12}$ di anno.

I valori stimati per i parametri del processo, espressi su base annua, sono rispettivamente:

- $\hat{\mu} = 0.0077$
- $\hat{\sigma} = 0.1021$

3.2.2 Processo Variance-Gamma

Il secondo processo stocastico considerato è il Variance-Gamma (VG), presentato da Madan e Seneta (1990), è utilizzato per modellare “fat tails” nella distribuzione dei rendimenti. Si definiscono “fat tails” i fenomeni in cui grandi variazioni numeriche estreme sono più frequenti di quanto mostrato da una ipotetica distribuzione normale.

Sia S_t la variabile che denota il rapporto di cambio USD/EUR al tempo t . Il processo VG segue la seguente dinamica:

$$d\log S_t = \mu dt + \theta dg_t + \sigma dW(g_t)$$

dove μ , θ e σ sono costanti reali, con $\sigma \geq 0$. Rispetto al moto Browniano geometrico si evidenzia la presenza del termine g_t che è un processo stocastico crescente e positivo, con incrementi stazionari e indipendenti. Il processo VG assume che g_t segua un processo Gamma con parametro v indipendente dal moto Browniano standard $\{W_t\}_{t \geq 0}$.

Denotiamo con $\pi = \{\mu, \theta, \sigma, v\}$ l'insieme dei parametri della seguente funzione densità di probabilità variance-gamma:

$$f(X_{\Delta t})(x) = \int_0^\infty f_N(x; \hat{\theta}g; \hat{\sigma}^2 g) f_G\left(g; \frac{\Delta t}{v}, v\right) dg$$

dove $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ e $X_{\Delta t} = \log\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right)$.

La stima di tali parametri a partire dalle serie storica dei log-rendimento del rapporto di cambio USD/EUR è effettuata con il metodo di massima verosimiglianza. I valori di inizializzazione della calibrazione sono ottenuti tramite il metodo della funzione generatrice dei momenti:

$$M_X(z) = e^{\hat{\mu}z} (1 - \hat{\theta}vz - \frac{1}{2}v\hat{\sigma}^2z^2)^{-\frac{\Delta t}{v}}$$

Si rimanda a Brigo et al. (2017) per la descrizione della procedura completa di stima.

I valori stimati per i parametri del processo, espressi su base annua, sono rispettivamente:

- $\hat{\mu} = -0.006$
- $\hat{\sigma} = 0.0295$
- $\hat{v} = 0.32$
- $\hat{\theta} = 0.0062$

3.2.3 Modello di Vasicek

Il terzo processo considerato è quello di Vasicek (1977), uno dei primi modelli stocastici per il tasso di interesse a breve termine. Questo processo è caratterizzato dalla proprietà di *mean reverting*, proprietà che appare nell'osservazione della serie storica del rapporto di cambio USD/EUR.

Il modello è descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dx_t = \alpha(\theta - x_t)dt + \sigma dW_t \quad (2)$$

in cui x_t indica il tasso di cambio al tempo t , i parametri α (velocità di ritorno alla media), θ (livello tendenziale) e σ (volatilità) sono positivi e dW_t descrive un moto Browniano standard.

La versione a tempo discreto della soluzione dell'equazione (2) è:

$$x_{t_i} = \theta(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + e^{-\alpha\Delta t}x_{t_{i-1}} + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha\Delta t}}{2\alpha}} \epsilon_{t_i}$$

dove ϵ_t è la realizzazione al tempo t di una variabile aleatoria normale standard ed è posto $\Delta t = t_i - t_{i-1}$.

La calibrazione del processo avviene tramite regressione lineare a partire dalle differenze prime delle osservazioni mensili dei tassi di cambio.

I valori stimati per i parametri del processo, espressi su base annua, sono rispettivamente:

- $\hat{\alpha} = 0.1947$
- $\hat{\theta} = 0.8745$
- $\hat{\sigma} = 0.09$

3.2.4 Modello di Vasicek di tipo esponenziale

Il quarto processo considerato è quello di Vasicek di tipo esponenziale, che è utilizzato, oltre che per la proprietà di *mean reverting*, anche per tener conto della positività dei tassi di interesse e catturare eventuali *fat tails* nella loro distribuzione.

Sia $y(t)$ descritta da un processo di Vasicek. Posto $x(t) = \exp(y(t))$, in modo da garantire la positività della variabile, il modello di Vasicek esponenziale è descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dx_t = \alpha x_t (m - \log(x_t)) dt + \sigma x_t dW_t \quad (3)$$

in cui α e σ sono costanti positive, $m = \theta + \frac{\sigma^2}{2\alpha}$ e dW_t è un moto Browniano standard.

La soluzione esplicita della equazione (3), considerata tra due qualsiasi istanti s e t , con $0 < s < t$, è data da:

$$x_t = \exp\left(\theta(1 - e^{-\alpha(t-s)}) + \log(x_s)e^{-\alpha(t-s)} + \sigma e^{-\alpha t} \int_s^t e^{au} dW_u\right)$$

con dW_t moto Browniano standard.

La calibrazione del processo x_t avviene mediante calibrazione del suo processo logaritmico tramite regressione lineare a partire dalle differenze prime delle osservazioni mensili dei tassi di cambio USD/EUR.

I valori stimati per i parametri del processo, espressi su base annua, sono rispettivamente:

- $\hat{\alpha} = 0.219$
- $\hat{\theta} = -0.1473$
- $\hat{\sigma} = 0.1017$

3.3 Metodologia per la valutazione del rischio di cambio

La metodologia adottata prevede di calcolare i rendimenti a scadenza dell'investimento del titolo Italy Govt ISIN US465410CC03, denominato in dollari, mediante simulazioni stocastiche. Sono quindi determinate le corrispondenti probabilità di shortfall, definite come:

- a) le probabilità che il titolo ottenga un rendimento a scadenza negativo;
- b) le probabilità che il titolo ottenga un rendimento a scadenza inferiore al rendimento a scadenza del titolo ISIN IT0005425233, denominato in euro, preso a confronto.

In aggiunta, per ognuno dei processi simulati, sono forniti i percentili dei rendimenti a scadenza del titolo.

Nello specifico, il titolo Italy Govt ISIN US465410CC03 prevede il pagamento di cedole semestrali posticipate il 6 maggio e il 6 novembre di ogni anno a partire dal 6 novembre 2021 e fino al 6 maggio 2051. Pertanto, il numero totale dei flussi è pari a 61 (60 flussi sono le cedole in incasso per l'investitore, compreso il rimborso finale, ed un flusso è dato dal pagamento per l'investitore alla data iniziale di acquisto del titolo).

Nella nostra simulazione, ad ogni data prevista d'incasso, ovvero, ad ogni data d'incasso della cedola ed alla data di rimborso a scadenza del titolo, il cash flow in dollari del titolo è valutato in base al valore del tasso di cambio USD/EUR per ogni scenario simulato. Il numero degli scenari della simulazione è pari a 10.000.

Le valutazioni dei possibili cash flow sono espresse in euro sulla base del valore simulato del tasso di cambio USD/EUR.

I passi delle simulazioni sono mensili.

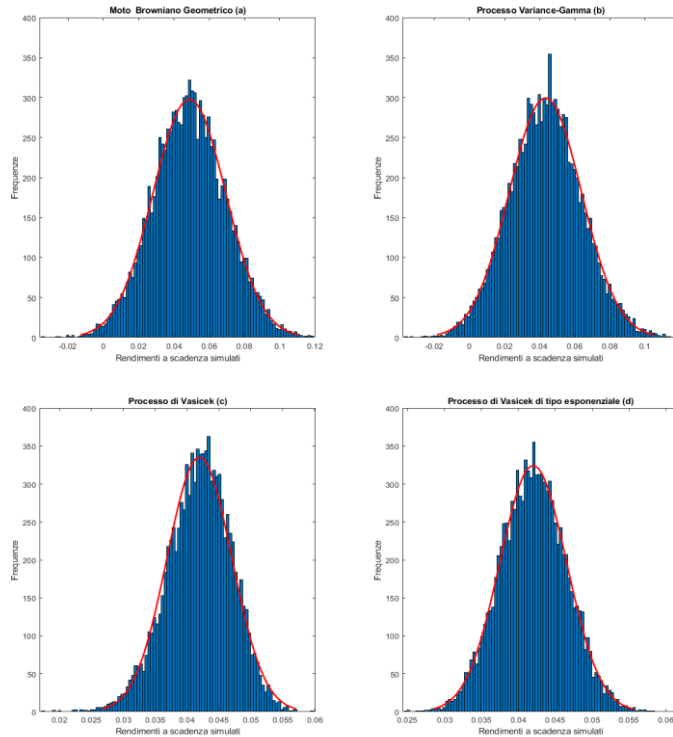
Le quotazioni di input del modello si riferiscono al 14 maggio 2021 data in cui il titolo Italy Govt ISIN US465410CC03 quotava 98,90 USD (prezzo *dirty ask*) con un

rendimento a scadenza di circa 3,94% (fonte Bloomberg). Alla stessa data, il corrispondente titolo ISIN IT0005425233ISIN, denominato in valuta domestica, presentava un rendimento a scadenza dell'1,95% (fonte Bloomberg).

4 Risultati delle simulazioni e principali conclusioni

Nella Figura 5 sono riportate le distribuzioni dei rendimenti a scadenza ottenute mediante la simulazione con le 10.000 traiettorie del rapporto di cambio USD/EUR generate per ciascuno dei processi stocastici considerati.

Figura 5. Distribuzione dei rendimenti a scadenza simulati, per processo generatore dei dati



Fonte: Elaborazione propria

Le probabilità di *shortfall* sono riportate nella Tabella 1. Si osserva che la probabilità di registrare un rendimento a scadenza negativo risulta massima nella simulazione con il processo VG (pari a 1,60%), si attesta al di sotto dell'1% nella simulazione con il moto Browniano geometrico, ed è nulla nelle altre due simulazioni. Analogamente, le probabilità di conseguire performance inferiori a quelle del corrispondente titolo in valuta domestica risulta massima nella simulazione con il processo VG (pari a 13,09%), si attesta a circa l'8% nella simulazione con il moto Browniano standard, risulta pari

allo 0,03% nella simulazione con il processo di Vasicek ed è nulla nelle simulazioni con il processo di Vasicek di tipo esponenziale.

Tabella 1. Probabilità di shortfall, per processo generatore dei dati e per tipo di rendimento a scadenza

Processo generatore dei dati	Shortfall Probability	
	Rendimento a scadenza minore di zero	Rendimento a scadenza del titolo in dollari minore del rendimento a scadenza del titolo in euro
Moto Browniano Geometrico	0,84%	8,04%
Variance-Gamma	1,60%	13,09%
Vasicek	-	0,03%
Vasicek di tipo esponenziale	-	-

Fonte: Elaborazione propria

Pertanto, dall'esame dei risultati ottenuti mediante le simulazioni stocastiche, si osserva che nelle simulazioni basate sul moto Browniano geometrico le probabilità di shortfall, per entrambi i tipi di rendimento a scadenza, risultano inferiori a quelle ottenute nelle simulazioni basate sul processo VG, appartenente alla stessa classe di processi stocastici. Si osserva, inoltre, che nelle simulazioni basate sui processi di tipo Vasicek, caratterizzati dalla proprietà di mean reverting, la probabilità di registrare un rendimento a scadenza superiore a quello del corrispondente titolo denominato in valuta nazionale è pari al 99,97% per il processo di Vasicek ed è pari al 100% per il processo di Vasicek tipo esponenziale.

Per quanto concerne i percentili riferiti al rendimento a scadenza nelle simulazioni con i diversi processi stocastici, si veda la Tabella 2. In particolare, con riferimento alla colonna del 50° percentile, si evidenzia una tendenza al rafforzamento del dollaro nei confronti dell'euro rispetto al livello d'ingresso in tutti i processi considerati.

Tabella 2. Percentili dei rendimenti a scadenza simulati, per processo generatore dei dati

Processo generatore dei dati	Percentili dei rendimenti a scadenza simulati						
	1°	5°	10°	50°	90°	95°	99°
Moto Browniano Geometrico	0,17%	1,51%	2,26%	4,86%	7,55%	8,32%	9,68%
Variance-Gamma	-0,39%	0,96%	1,69%	4,33%	6,96%	7,78%	9,26%
Vasicek	3,37%	3,67%	3,82%	4,26%	4,67%	4,77%	4,97%
Vasicek di tipo esponenziale	3,17%	3,45%	3,62%	4,20%	4,79%	4,94%	5,26%
Rendimento a scadenza del titolo in euro	1,95%						

Fonte: Elaborazione propria

In conclusione, la nostra analisi effettua una valutazione di un investimento in valuta da parte di un investitore che detiene il titolo con logica di rimborso a scadenza mediante processi stocastici opportunamente scelti.

Dallo studio, alla luce delle simulazioni effettuate, emerge che il differenziale di rendimento tra il titolo denominato in valuta e il titolo denominato in euro può giustificare l'investimento, tenuto conto anche della volatilità del rapporto di cambio.

Tra i processi considerati, il modello di Vasicek ed il modello Vasicek di tipo esponenziale, in virtù della proprietà di mean reverting, appaiono più idonei per la valutazione del rischio di cambio associato all'investimento nella valuta considerata.

Bibliografia

- Brigo D., D'Alessandro A., Neugebauer M. and Triki, F. (2007), A stochastic processes toolkit for risk management, available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=1109160> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1109160>.
- Engle R.F. (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50 (4), 987–1007.
- Hull J.C.H. (2009), *Opzioni, futures ed altri derivati*. Pearson Ed., Italia.
- Jarque C. M. and Brera A.K. (1987), A Test for Normality of Observations and Regression Residuals, *International Statistical Review*, 55 (2), 163–172.
- Ljung G. M. and Box G. E. P. (1978), On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models, *Biometrika*, 65 (2), 297–303.
- Madan D. B. and Seneta E. (1990), The Variance Gamma (VG) model for share market returns, *Journal of business*, 63 (4), 511-524.
- Terborgh G.W. (1926), The Purchasing-Power Parity Theory, *Journal of Political Economy*, 34, 197-208.
- Vasicek O. (1977), An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of financial economics*, 5 (2), 177-188.