

Massimo Angrisani*,
Maria Giuseppina Bruno*,
Cinzia Di Palo‡,
Pierluigi Fava*,
Maria Rita Scarpitti*

PRICING DI UNA RENDITA VITALIZIA LONG-TERM CARE CON GARANZIA DI PRELIEVO CON IL METODO DELLE TRAIETTORIE INDIVIDUALI ESATTE

Abstract. The present work aims at evaluating Long-Term Care annuity contracts with Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefits using the method of the Exact Individual Trajectories. This model, basically developed for the management of pension funds, is setup on an axiomatic basis and allows a complete description of the sample space. In addition the financial component of the contract is modelled through the Heston model which considers stochastic both the stock price and the volatility.

Keywords: Long-Term Care, Variable Annuity, Life Care Annuity, Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefits, Heston Model, Markov chain, Exact Individual Trajectories.

1. Introduzione

L'evoluzione socio-demografica caratterizzante le economie sviluppate, nelle quali si registrano invecchiamento demografico e diminuzione dei tassi di natalità con conseguente riduzione dei componenti dei nuclei famigliari, ha generato un crescente interesse verso forme assicurative di assistenza a lungo termine.

I contratti Long-Term Care (LTC) prevedono supporto sanitario e personale ad assicurati con malattie croniche o disabilità. Tale tipologia assicurativa include servizi di supporto e assistenza per le attività della vita quotidiana (ADL), come mangiare, fare il bagno e vestirsi. Il supporto assistenziale può avvenire a casa, in una comunità, in strutture di residenza assistita o in case di cura; in alternativa la prestazione è erogabile sotto forma di pagamenti periodici in denaro (Haberman, Pitacco, 1999).

I recenti trend osservati nei mercati assicurativi mostrano però poca sensibilità nell'assicurarsi dal rischio di non autosufficienza (Eling, Ghavibazoo, 2018). Al fine di ridurre il mismatching tra rischio percepito e rischio potenziale prospettico, l'interesse degli operatori di mercato si è quindi rivolto verso strumenti di natura ibrida, Long Care Annuity (LCA), in grado di combinare l'assistenza in caso di non autosufficienza con l'erogazione di rendite vitalizie dinamiche denominate Variable Annuities.

Come descritto in Bacinello et al. (2011), generalmente le Variables Annuities possono differire a seconda del tipo di garanzia che le accompagna. In particolare con la sigla GMxB (Guaranteed Minimum x Benefit) viene indicato il beneficio minimo garantito di tipo x , in cui la x può essere A (accumulazione), D (morte), I reddito o W (prelievo).

* Sapienza Università di Roma

‡ Università degli studi di Cassino e del Lazio Meridionale

In letteratura, l'integrazione tra rendite vitalizie dinamiche e assicurazioni LTC è stata affrontata in diversi studi (Murtaugh, Spillman, Warshawsky (2001); Webb (2009); Brown, Warshawsky (2013)), che evidenziano sinergie in termini di riduzione dei costi rispetto alla sottoscrizione stand-alone dei due prodotti.

Hsieh et al. (2018) hanno presentato il primo studio dedicato alle assicurazioni LTC combinate con una polizza di tipo Variable Annuity incorporante una garanzia vitalizia di prelievo, definita secondo la terminologia anglosassone Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefits (GLWB). In questo lavoro, si considera il modello di Hsieh et al. (2018) proposto per la polizza di tipo LCA-GLWB e per la valutazione della stessa si applica il metodo delle Traiettorie Individuali Esatte (T.I.E.) introdotto in Angrisani (1999) e utilizzato per la realizzazione di bilanci tecnici attuariali.

Il lavoro è organizzato come segue. Nella Sezione 2 è descritta la struttura del contratto assicurativo LCA-GLWB. Nella Sezione 3 è brevemente richiamato il modello attuariale T.I.E., ed è quindi proposto l'adattamento dello stesso per la valutazione della polizza LCA-GLWB. Nella Sezione 4 si descrive il modello finanziario adottato per la valutazione del contratto. I risultati numerici sono illustrati nella Sezione 5, seguiti da considerazioni finali riportate nelle Conclusioni.

2. Struttura del contratto assicurativo

Come mostrato in Hsieh et al. (2018), la polizza di tipo LCA con componente GLWB consente di poter beneficiare di una rendita vitalizia e di un'assicurazione Long-Term Care in caso di non autosufficienza.

Il pricing di una polizza LCA-GLWB risulta abbastanza complesso. La difficoltà risiede nel modellizzare la variabile aleatoria associata allo stato di salute dell'assicurato, dal quale dipende il cash-out della polizza.

Premesso di operare nel tempo discreto, sia l'anno l'unità di tempo considerata e sia T l'anno in cui avviene il decesso dell'assicurato. Sia W_t la variabile che indica il valore del deposito (account) al tempo t , con $t = 0, 1, 2, \dots, T$, e siano fissate le commissioni di gestione fissa, denotate con K , e le commissioni percentuali, denotate con αW_t , con α costante. Al valore del deposito viene riconosciuto un rendimento annuo, R_t , sulla base di un indice di riferimento.

Al tempo $t = 0$, l'assicurato di età x versa un premio w_0 , che costituisce il valore iniziale del suo account. All'inizio di ogni anno, quindi per $t = 0, 1, 2, \dots, T - 1$, la commissione garantita, pari ad α volte il valore dell'account, e la commissione fissa di gestione K sono prelevate dall'assicuratore. Indichiamo con $M_x(t)$ la variabile aleatoria associata allo stato di salute dell'assicurato all'età $x + t$. Nel modello che proponiamo, sono considerati tre differenti stati di salute: autosufficiente (A), non autosufficiente (I) ed estinto (E). Per la modellizzazione della variabile aleatoria $M_x(t)$, si farà ricorso ad un adattamento del modello T.I.E.

Alla fine di ogni anno, quindi per $t = 1, 2, \dots, T$, l'assicuratore versa all'assicurato il beneficio LTC, di importo fissato δw_0 , con δ aliquota costante, in caso di non autosufficienza (quindi subordinatamente all'ipotesi $M_x(t) = I$), in aggiunta al beneficio di rendita vitalizia di importo pari a $g w_0$, con g aliquota costante.

Al decesso dell'assicurato, quindi al tempo T , la polizza garantisce al beneficiario di percepire il massimo tra il valore residuale del fondo e l'importo pari all'ultimo ammontare di prelievo eseguito.

Siano al tempo t , W_t^- il valore del deposito prima di compiere il prelievo e W_t^+ il valore del predetto deposito dopo aver effettuato il prelievo. L'evoluzione del valore del deposito per la polizza sopra descritta può allora essere formalizzata nel modo seguente:

$$W_0^- = w_0 \quad (1)$$

$$W_0^+ = \max((1 - \alpha)W_0^- - K, 0) \quad (2)$$

$$W_t^- = R_t W_{t-1}^+ \quad \text{con } t = 1, 2, \dots, T \quad (3)$$

$$W_t^+ = \max(0, (1 - \alpha)W_t^- - K - g w_0 - \delta w_0 |_{M_x(t)=I}) \quad \text{con } t = 1, 2, \dots, T - 1 \quad (4)$$

$$W_T^+ = \max(g w_0 + \delta w_0 |_{M_x(T-1)=I}, W_T^-) \quad (5)$$

Dalla prospettiva dell'assicurato, i flussi di cassa, Y_t e Y_T derivanti dalla polizza sono:

$$Y_t = (gw_0 + \delta w_{0|M_x(t)=I}) \text{ con } t = 1, 2, \dots, T - 1; \quad (6)$$

$$Y_T = \max(gw_0 + \delta w_{0|M_x(T-1)=I}, W_T^-) \quad (7)$$

Il flusso al tempo T dato dalla (7) è scomponibile come segue:

$$Y_T = gw_0 + \delta w_{0|M_x(T-1)=I} + \max\left(0, W_T^- - (gw_0 + \delta w_{0|M_x(T-1)=I})\right) \quad (8)$$

dove il secondo addendo al secondo membro è il flusso derivante dall'opzione GLWB associata alla LCA.

Richiamando i lavori di Brennan, Schwartz (1976) e Harrison, Kreps (1979) basati sulla valutazione risk neutral, sotto un'apposita misura di probabilità Q , il fair value della polizza LCA è dato da:

$$Y(LCA)_0 = E^Q \left(\sum_{t=1}^{T-1} \frac{gw_0 + \delta w_{0|M_x(t)=I}}{B(t)} \right) + E^Q \left(\frac{gw_0 + \delta w_{0|M_x(T-1)=I}}{B(T)} \right) \quad (9)$$

ed il fair value dell'opzione aggiuntiva:

$$Y(GLWB)_0 = E^Q \left(\frac{\max(0, W_T^- - (gw_0 + \delta w_{0|M_x(T-1)=I}))}{B(T)} \right) \quad (10)$$

in cui il termine $B(t)$ indica il valore al tempo t di un generico deposito unitario al tempo 0 remunerato al tasso risk free. Le variabili aleatorie usate nel pricing della polizza sono il rendimento dell'indice di riferimento R_t e lo stato di salute $M_x(t)$ dell'assicurato. La condizione di equilibrio della polizza come descritto in Scorrano (2015) è garantita dal valore dell'aliquota α^* che determina l'uguaglianza tra il deposito iniziale ed il fair value della polizza.

3. Il modello attuariale delle Traiettorie Individuali Esatte e la sua applicazione per il pricing di una polizza LCA-GLWB

In questa sezione, descriviamo il modello T.I.E. (Angrisani, 1999; Angrisani, Attias, 2004), che verrà utilizzato per modellizzare gli eventi elementari che caratterizzano la polizza LCA-GLWB.

Il modello T.I.E. si può classificare come un modello di gestione di un fondo pensione IVS (Invalidità, Vecchiaia, Superstiti) di tipo individuale, quali sono, per esempio, il metodo dei Valori Attuali Medi (V.A.M.) (Coppini, 1979; Tomassetti 1986, 1996) o il Metodo degli Anni di Gestione su base Individuale e per Sostegno (M.A.G.I.S.), proposto da Coppini (1979b) e Tomassetti (1973, 1979), che impiega la simulazione stocastica. Diversamente dal V.A.M. e dal M.A.G.I.S., il modello T.I.E. si fonda su base assiomatica e non prevede la generazione stocastica di traiettorie.

Il T.I.E. prevede valutazioni strutturate *per anni di gestione su base individuale*: per ogni anno di gestione e per ogni assicurato, attivo o pensionato, è stimato il flusso finanziario atteso, di natura previdenziale, relativamente all'orizzonte temporale di riferimento della valutazione. Su base assiomatica, sono definite tutte le possibili evoluzioni future della posizione dell'individuo, le cosiddette *traiettorie ammissibili*. Ogni traiettoria ammissibile è formalmente rappresentata come un vettore contenente i possibili successivi stati assunti dall'assicurato, e a ciascuna di esse è attribuita la corrispondente probabilità. Ogni vettore rappresentativo di una traiettoria ammissibile è quindi convertito in un vettore contenente il flusso di contribuzioni o prestazioni, calcolato sulla base di dati forniti per ciascuna posizione. Quindi, per ciascuna posizione il vettore di flusso medio annuo è ottenuto dall'aggregazione dei singoli vettori relativi a tale posizione e ponderati per le relative probabilità assegnate in ipotesi di markovianità.

Di seguito, nella sezione 3.1. sono richiamati gli elementi essenziali del modello T.I.E. e quindi nella sezione 3.2. è illustrata l'applicazione di tale modello per il pricing di una polizza LCA-GLWB.

3.1. Configurazione del modello T.I.E.

Nel modello T.I.E. è necessario definire il ciclo vitale della posizione dell'assicurato: per ogni anno la posizione dell'assicurato è specificata dallo stato che questo può assumere subordinatamente al verificarsi di eventi stabiliti. In ogni caso, uno e un solo stato può essere assunto dall'assicurato in ciascun anno.

Per il modello IVS è definito il seguente insieme S degli stati:

$$S = \{A, P_i, P_{a/v}, P_S, E\}$$

in cui sono considerati gli stati di:

- $A = \text{attivo}$
- $P_i = \text{pensione di invalidità}$
- $P_{a/v} = \text{pensione di anzianità o vecchiaia}$
- $P_S = \text{pensione ai superstiti } (P_{ind}, P_i^r, P_{a/v}^r)$, con P_{ind} pensione indiretta, P_i^r pensione reversibile di invalidità, $P_{a/v}^r$ pensione reversibile di anzianità o vecchiaia
- $E = \text{eliminazione}$

Gli stati sono ordinati nel seguente modo:

$$A \leq P_i \leq P_{a/v} \leq P_S \leq E$$

Per ogni assicurato si considerano:

- x : età dell'assicurato al tempo iniziale di valutazione, $i = 0$;
- T : numero di anni per il conseguimento della pensione di anzianità o vecchiaia;
- $\omega - x$: età massima raggiungibile dall'assicurato.

Si definisce la traiettoria come il vettore di $\omega - x + 1$ componenti dove la i -esima componente è lo stato assunto dalla posizione dell'assicurato dopo i anni, con $i = 0, 1, 2 \dots \omega - x$. Formalmente, una traiettoria è definita come una funzione $\Pi(\cdot)$ il cui dominio è l'insieme ordinato di numeri naturali $M = \{0, 1, 2, \dots, \omega - x\}$ ed il cui codominio è l'insieme ordinato degli stati S .

Tale funzione $\Pi(\cdot)$ definisce una **traiettoria ammissibile** se verifica i seguenti cinque assiomi:

$$A_1: \quad \forall i, j \in M \text{ e } i \leq j \rightarrow \Pi(i) \leq \Pi(j),$$

l'assioma A_1 esplicita la condizione di non decrescenza della funzione $\Pi(\cdot)$;

$$A_2: \quad \forall i \in M \text{ e } T \leq i \rightarrow \Pi(i) \neq A,$$

l'assioma A_2 asserisce che dopo T o più anni non è possibile occupare lo stato A ;

$$A_3: \quad \forall i \in M \text{ e } i < T \rightarrow \Pi(i) \neq P_{a/v},$$

l'assioma A_3 asserisce che la posizione dell'assicurato non può assumere lo stato $P_{a/v}$ prima di T anni;

$$A_4: \quad \exists i \in M: \prod(i) = P_i \implies \forall j \geq i \rightarrow \prod(j) \neq P_{a/v},$$

l'assioma A_4 rappresenta l'impossibilità di occupare lo stato $P_{a/v}$ per un assicurato che ha già occupato lo stato P_i ;

$$A_5: \quad \prod(0) = A, \quad \prod(\omega - x) = E$$

l'assioma A_5 asserisce che la prima componente del vettore traiettoria è lo stato attivo e l'ultima componente del vettore traiettoria è lo stato di eliminazione.

3.1.1. Teorema di Rappresentazione delle traiettorie ammissibili

Consideriamo l'insieme $Q \subseteq R^3$ costituito dai punti $P(z_1, z_2, z_3)$ verificanti le seguenti condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1, z_2 \text{ interi} \geq 0 \\ z_3 \text{ intero} \geq 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 \leq \omega - x \\ z_1 \geq T \implies z_2 = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

Associamo a ciascun punto $P(z_1, z_2, z_3) \in Q$ una traiettoria ovvero definiamo un'applicazione $\prod[P(z_1, z_2, z_3)](\cdot): M \rightarrow S$. Tale associazione si ottiene nel seguente modo: tramite le coordinate del punto $P(z_1, z_2, z_3)$, l'insieme degli indici $M = \{0, 1, 2, \dots, \omega - x\}$ è decomposto nell'unione disgiunta dei sottoinsiemi M_k , con $k = 1, \dots, 5$, così definiti:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = \{i \in M: 0 \leq i \leq z_1 \wedge (T - 1)\} \\ M_2 = \{i \in M: z_1 \wedge (T - 1) < i \leq z_1\} \\ M_3 = \{i \in M: z_1 < i \leq z_1 + z_2\} \\ M_4 = \{i \in M: z_1 + z_2 < i \leq z_1 + z_2 + z_3 - 1\} \\ M_5 = \{i \in M: z_1 + z_2 + z_3 - 1 < i \leq \omega - x\} \end{array} \right. \quad (12)$$

Ogni indice $i \in M$ appartiene ad uno ed uno solo degli insiemi M_k , per $k = 1, \dots, 5$. Associamo quindi al punto $P(z_1, z_2, z_3) \in Q$ la seguente traiettoria:

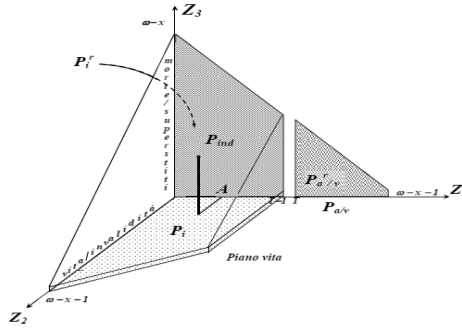
$$\prod[P(z_1, z_2, z_3)](i) = \left\{ \begin{array}{l} A \text{ per } i \in M_1 \\ P_{a/v} \text{ per } i \in M_2 \\ P_i \text{ per } i \in M_3 \\ P_S \text{ per } i \in M_4 \\ E \text{ per } i \in M_5 \end{array} \right. \quad (13)$$

Vale il seguente **Teorema di Rappresentazione delle traiettorie ammissibili**:

I punti dell'insieme Q sono in corrispondenza biunivoca, mediante l'applicazione definita dalle relazioni (12) e (13), con le traiettorie ammissibili.

Rimandiamo per la dimostrazione ad Angrisani (1999) ed Angrisani, Attias (2004). Nella seguente Figura 1, è illustrato geometricamente l'insieme dei punti $P(z_1, z_2, z_3) \in Q$ che individua le traiettorie ammissibili.

Figura 1. Rappresentazione geometrica delle traiettorie ammissibili



Fonte: Angrisani, 1992; Angrisani, Attias, 2004

3.2. Applicazione del modello T.I.E. per il pricing di una polizza LCA-GLWB

In questa sezione, si applica il modello T.I.E. presentato nella sezione 3.1. per la valutazione di una polizza di tipo LCA-GLWB.

Lo spazio degli stati è dato dall'insieme $S = \{A, I, E\}$, in cui A = autosufficiente, I = non autosufficiente, E = estinto. Gli stati sono ordinati nel seguente modo:

$$A \leq I \leq E.$$

Tale ordinamento implica l'impossibilità di ripristino dello stato di autosufficiente se si incorre nello stato di non autosufficienza; lo stato di estinzione è di tipo assorbente.

Come nella sezione 3.1, per ogni assicurato si indica con x l'età al tempo iniziale di valutazione $i = 0$ e con $\omega - x$ l'età massima raggiungibile. Pertanto, nell'adattamento del modello T.I.E. al problema in esame, la funzione $\Pi(\cdot)$, il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali $M = \{0, 1, 2, \dots, \omega - x\}$ ed il cui codominio è l'insieme ordinato degli stati S , definisce una **traiettoria ammissibile** se verifica la seguente coppia di assiomi:

- $A_1^* : \forall i, j \in M \text{ e } i \leq j \rightarrow \Pi(i) \leq \Pi(j)$ (14)
- $A_2^* : \Pi(0) = A, \quad \Pi(\omega - x) = E$ (15)

Il primo assioma stabilisce la condizione di non decrescenza della funzione $\Pi(\cdot)$, ovvero l'inammissibilità della regressione degli stati lungo la traiettoria; il secondo assioma definisce lo stato iniziale e finale di una traiettoria.

Definiamo componente terminale della traiettoria (intesa come vettore) la prima componente a cui corrisponde lo stato E .

Consideriamo l'insieme $Q \subseteq R^2$ formato dai punti $P(z_1, z_2)$ tali che:

$$\begin{cases} z_1, z_2 \text{ interi} \geq 0 \\ z_1 + z_2 < \omega - x \end{cases} \quad (16)$$

Stabiliamo poi la corrispondenza tra i punti appartenenti all'insieme Q e le traiettorie. In particolare, mediante le coordinate del punto $P(z_1, z_2)$, decomponiamo l'insieme degli indici $M = \{0, 1, 2, \dots, \omega - x\}$ nell'unione disgiunta dei sottoinsiemi di indici M_k , con $k = 1, 2, 3$, definiti come segue:

$$\begin{cases} M_1 = \{i \in M : 0 \leq i \leq z_1\} \\ M_2 = \{i \in M : z_1 < i \leq z_1 + z_2\} \\ M_3 = \{i \in M : z_1 + z_2 < i \leq \omega - x\} \end{cases} \quad (17)$$

con M_2 eventualmente vuoto. Ogni indice $i \in M$ appartiene ad uno ed uno solo degli insiemi M_k , per $k = 1, 2, 3$. Poniamo il punto $P(z_1, z_2)$ in corrispondenza biunivoca con la seguente traiettoria:

$$\Pi[P(z_1, z_2)](i) = \begin{cases} A \text{ per } i \in M_1 \\ I \text{ per } i \in M_2 \\ E \text{ per } i \in M_3 \end{cases} \quad (18)$$

Il Teorema di Rappresentazione delle traiettorie ammissibili conserva la sua validità.

3.3. Assegnazione delle probabilità alle traiettorie ammissibili

Dopo aver generato tutte le traiettorie ritenute ammissibili su base assiomatica, la metodologia del T.I.E. prevede che ad esse siano attribuite le corrispondenti probabilità di verificarsi in ipotesi di markovianità.

Le probabilità di transizione dell'assicurato allo stato s nell'età $x + i$ dato lo stato r occupato nell'età x sono così genericamente definite:

$${}_i p_x^{rs} = P\{S(x+i) = s | S(x) = r\} \quad \text{con} \quad i \in [0, T] \quad r, s \in S = \{A, I, E\}, r \neq s \quad (19)$$

Per $i = 1, 2, \dots, T$, seguono le equazioni di Chapman-Kolmogorov:

$$- \quad {}_i p_x^{AA} = {}_{i-1} p_x^{AA} \cdot p_{x+i-1}^{AA} \quad (20)$$

$$- \quad {}_i p_x^{AI} = {}_{i-1} p_x^{AI} \cdot p_{x+i-1}^{II} + {}_{i-1} p_x^{AA} \cdot p_{x+i-1}^{AI} \quad (21)$$

$$- \quad {}_i p_x^{II} = {}_{i-1} p_x^{II} \cdot p_{x+i-1}^{II} \quad (22)$$

Le restanti probabilità sono calcolate come:

$$- \quad {}_i q_x^{AE} = 1 - {}_i p_x^{AA} - {}_i p_x^{AI} \quad (23)$$

$$- \quad {}_i q_x^{IE} = 1 - {}_i p_x^{II} \quad (24)$$

Introducendo la seguente notazione:

- $D_{x,i}^{rs}$, il numero delle transizioni dallo stato r allo stato s , con $r \neq s$, rilevate annualmente per la testa assicurata di età x nell'epoca i della tavola considerata;
- $l_{x,i}^r$, il numero di teste in vita nello stato r , di età x , nell'epoca i della tavola considerata;

è possibile calcolare le probabilità annuali $p_{x,i}^{rs}$, con $r \neq s$, come segue:

$$- \quad p_{x,i}^{rs} = \frac{D_{x,i}^{rs}}{l_{x,i}^r} \quad (25)$$

mentre le probabilità annuali $p_{x,i}^{rr}$, risultano così calcolate:

$$- \quad p_{x,i}^{rr} = \frac{l_{x+1,i+1}^r}{l_{x,i}^r} \quad (26)$$

Le probabilità definite in precedenza vengono utilizzate per realizzare la tavola di sopravvivenza/permanenza nello stato di attivo.

Sia inoltre:

- l_x^{AA} : numero atteso di individui attivi;
- q_x^A : probabilità per un soggetto attivo di età x di morire entro l'anno.

Per ogni x sussiste la seguente relazione ricorrente:

$$l_{x+1}^{AA} = l_x^{AA} - l_x^{AA} \cdot p_x^{AI} - l_x^{AA} \cdot q_x^A \quad (27)$$

Si introducono le matrici $B(i)$ che indicano per le traiettorie ammissibili le probabilità di permanenza/transizione nell'anno i . Nella seguente Tabella 1, è riportata la matrice di permanenza/transizione $B(i)$, con i tale che $0 < i < \omega - x - 1$. Nella Tabella 1, per comodità di lettura, gli stati appartenenti all'insieme S sono riportati nelle intestazioni delle righe e delle colonne della matrice.

Tabella 1: Matrice delle probabilità di permanenza/ transizione nell'anno i , $B(i)$.

| | | Stato nell'anno $i+1$ | | |
|---------------------|---|----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | | A | I | E |
| Stato nell'anno i | A | ${}^A p_{I,E}(x+i, x+i+1)$ | ${}^A p_I^E(x+i, x+i+1)$ | ${}^A q_E^I(x+i, x+i+1)$ |
| | I | 0 | ${}^I p_E(x+i, x+i+1)$ | ${}^I q_E(x+i, x+i+1)$ |
| | E | 0 | 0 | 1 |

Fonte: Elaborazione propria degli autori

Ogni elemento della matrice $B(i)$ indica la probabilità di permanenza/transizione tra lo stato che l'assicurato ha assunto nell'anno i e lo stato che questo può assumere nell'anno successivo. In particolare:

- ${}^A p_{I,E}(x+i, x+i+1)$ è la probabilità dell'assicurato di permanere nello stato di autosufficienza tra l'età $(x+i)$ e $(x+i+1)$
- ${}^A p_I^E(x+i, x+i+1)$ la probabilità dell'assicurato autosufficiente di passare nello stato non autosufficiente tra l'età $(x+i)$ e $(x+i+1)$;
- ${}^A q_E^I(x+i, x+i+1)$ la probabilità dell'assicurato autosufficiente di morire tra l'età $(x+i)$ e $(x+i+1)$;
- ${}^I p_E(x+i, x+i+1)$ la probabilità dell'assicurato non autosufficiente di permanere in tale stato tra l'età $(x+i)$ e $(x+i+1)$;
- ${}^I q_E(x+i, x+i+1)$ la probabilità dell'assicurato non autosufficiente di morire tra l'età $(x+i)$ e $(x+i+1)$.

Le matrici delle probabilità di permanenza/transizione sono caratterizzate da:

- elementi non negativi e minori od uguali ad 1; la somma degli elementi per riga è uguale a 1;
- in base all'assioma A_1^* le matrici sono triangolari superiori;
- in base all'assioma A_2^* , nella matrice $B(0)$ è attiva solo la prima riga e la matrice $B(\omega - x - 1)$ è caratterizzata da elementi nulli per le colonne diverse dall'ultima ed uguali ad 1 per gli elementi dell'ultima colonna;
- Lo stato E, che è assorbente, ha probabilità di permanenza pari ad 1.

Data una traiettoria ammissibile k , ovvero una funzione $\prod^k(\cdot): M \rightarrow S$ che soddisfa gli assiomi A_1^* e A_2^* , rappresentata dal vettore degli stati $\prod^k(0), \prod^k(1), \dots, \prod^k(\omega - x)$, in ipotesi di markovianità, questa ha probabilità pari a:

$$\prod_{i=0}^{\omega-x-1} Prob\{\prod^k(i), \prod^k(i+1)\} \quad (28)$$

in cui la probabilità di permanenza/transizione:

$$Prob\{\prod^k(i), \prod^k(i+1)\} \quad (29)$$

è fornita dalla matrice $B(i)$. Per il modo in cui dette probabilità sono ottenute, si ha:

$$\sum_{k=1}^N \prod_{i=0}^{\omega-x-1} Prob\{\prod^k(i), \prod^k(i+1)\} = 1 \quad (30)$$

in cui N indica il numero delle traiettorie ottenute attraverso la base assiomatica definita in precedenza. In sostanza, la sommatoria di tutte le probabilità associate ad ogni traiettoria è pari ad 1, in tal modo il modello T.I.E. riesce a rappresentare totalmente lo spazio campionario Ω .

La trasformazione delle traiettorie ammissibili in vettori di flusso contribuzioni/prestazioni si ottiene sulla base delle ipotesi contrattuali e tecniche che regolano la copertura assicurativa.

4. Il modello finanziario

Sia S_t il valore al tempo t dell'indice di riferimento per il quale nel seguito del lavoro si ipotizza una dinamica alla Heston (Heston, 1993). Richiamando brevemente quanto descritto in Bruno et al. (2019), il modello, sotto la misura risk neutral Q , impone che il prezzo del titolo sottostante l'opzione, S_t , e la sua varianza, v_t , soddisfino il seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche bivariate:

$$\begin{cases} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{(1,t)} \\ dv_t &= k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{(2,t)} \end{cases} \quad (31)$$

in cui: r , tasso risk free, è la componente di drift del processo del sottostante; k , θ , σ sono rispettivamente la velocità di mean reversion, il livello di mean reversion e la volatilità del processo della varianza; infine $dW_{(1,t)}$ e $dW_{(2,t)}$ sono i processi di Wiener standard in forma differenziale rispettivamente per il sottostante e per la varianza. Questi ultimi sono supposti correlati mediante la seguente funzione di correlazione:

$$E^Q[dW_{(1,t)} dW_{(2,t)}] = \rho dt \quad (32)$$

dove ρ è il coefficiente di correlazione tra i due moti browniani.

Operando nel tempo discreto entrambi i processi necessitano di essere trasformati.

4.1. Processi per $\ln S_t$ e v_t

Applicando il lemma di Ito si ottiene la dinamica per il logaritmo naturale del prezzo riferito al sottostante:

$$d(\ln S_t) = \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t} \quad (33)$$

Passando alla forma integrale:

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t + \int_0^t \left(r - \frac{1}{2}v_u\right) du + \int_0^t \sqrt{v_u} dW_{1,u} \quad (34)$$

da cui attraverso la discretizzazione di Eulero si ottiene:

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \sqrt{v_t}(W_{1,t+dt} - W_{1,t}) = \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \sqrt{v_t} dZ_s \quad (35)$$

in cui $Z_s \sim N(0, dt)$, mentre per S_t si ha:

$$S_{t+dt} = S_t e^{\left(\left(r - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}dZ_s\right)} \quad (36)$$

Il processo della varianza viene discretizzato attraverso lo schema Milstein (Gatheral, 2006):

$$v_{t+dt} = v_t + k(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dZ_v + \frac{1}{4}\sigma^2 dt(Z_v^2 - 1) \quad (37)$$

che può essere scritto come:

$$v_{t+dt} = \left(\sqrt{v_t} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{dt}Z_v\right)^2 + k(\theta - v_t)dt - \frac{1}{4}\sigma^2 dt \quad (38)$$

La discretizzazione di Milstein produce un numero di valori negativi per la varianza inferiore rispetto all'impiego del metodo di Eulero. Per i valori della varianza negativi viene adottato lo schema full-truncation (Broadie, 2006), $v_t = \max(0, v_t)$.

La generazione delle due variabili aleatorie Z_s e Z_v correlate dal parametro ρ è ottenuta attraverso due distribuzioni normali standard Z_1 e Z_2 . Si impone $Z_v = Z_1$ e $Z_s = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2$.

5. Il pricing della polizza LCA-GLWB

In questa sezione si illustra numericamente l'applicazione del modello T.I.E. ad una polizza di tipo LCA-GLWB.

La polizza prevede le seguenti ipotesi contrattuali:

- mancata restituzione del capitale versato in caso di morte dell'assicurato durante l'anno di prima sottoscrizione;
- mancata corresponsione del pagamento alla fine del primo anno di sottoscrizione nell'eventualità in cui il sottoscrittore diventi non autosufficiente in tale anno;
- le rilevazioni e le movimentazioni avvengono alla fine dell'anno.

In analogia con la metodologia proposta in Scorrano (2015), il pricing, condotto attraverso la metodologia T.I.E., prevede di determinare al tempo 0 l'equilibrio attuariale della polizza mediante la ricerca del parametro α^* tale che:

$$(Y(LCA)_0 + Y(GLWB)_0) - W_0 = 0 \quad (39)$$

Per il pricing della polizza sono state adottate le seguenti basi tecniche proiettate:

- Tavola di mortalità per generazione A62-ANIA 2015;
- Tavola LTC15M-ANIA per la probabilità di morte dei non autosufficienti - scenario centrale;
- Tavola LTC15M-ANIA per la probabilità di transizione da attivo a non autosufficiente - scenario centrale.

Il rendimento annuale del fondo al tempo t viene desunto dall'andamento di S_t , simulato attraverso la realizzazione di N traiettorie. I parametri del modello di Heston, come in Bruno et al. (2019), in rispetto della condizione di Feller, sono:

| k | θ | σ | v_0 | ρ |
|--------|----------|----------|--------|---------|
| 2.6012 | 0.052 | 0.8226 | 0.0221 | -0.7287 |

Fonte: Bruno et al. 2019

Il tasso tecnico di attualizzazione, r , è posto pari al 2%.

L'applicazione del modello T.I.E è implementata in tre fasi.

Inizialmente viene costruita la matrice delle traiettorie ammissibili che soddisfano i criteri assiomatici. Successivamente tali traiettorie vengono probabilizzate secondo le basi tecniche adottate e convertite in flussi monetari.

| Matrice Traiettorie | |
|---------------------|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| . | . |
| 1 | 0 |
| 1 | 1 |
| 1 | 2 |
| . | . |
| 2 | 0 |
| 2 | 1 |
| . | . |

| Matrice Uscite | | | | |
|----------------|-----------|-----------|---------|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | . |
| 0 | | | | |
| 0 | Opzione | | | |
| 0 | gw_0+δw_0 | Opzione | | |
| 0 | gw_0+δw_0 | gw_0+δw_0 | Opzione | |
| . | . | . | . | . |
| gw_0 | Opzione | | | |
| gw_0 | gw_0+δw_0 | Opzione | | |
| gw_0 | gw_0+δw_0 | gw_0+δw_0 | Opzione | |
| . | . | . | . | . |
| gw_0 | gw_0 | Opzione | | |
| gw_0 | gw_0 | gw_0+δw_0 | Opzione | |
| . | . | . | . | . |

Fonte: Elaborazione propria degli autori

Gli importi dei prelievi sono costanti e predeterminati nel contratto assicurativo ma dipendenti dal path del ciclo di vita dell'assicurato descritto attraverso la metodologia T.I.E., mentre il termine Opzione è funzione anche dell'andamento dell'indice di riferimento.

5.1. Risultati

L'implementazione numerica è stata eseguita con il software MatLab.

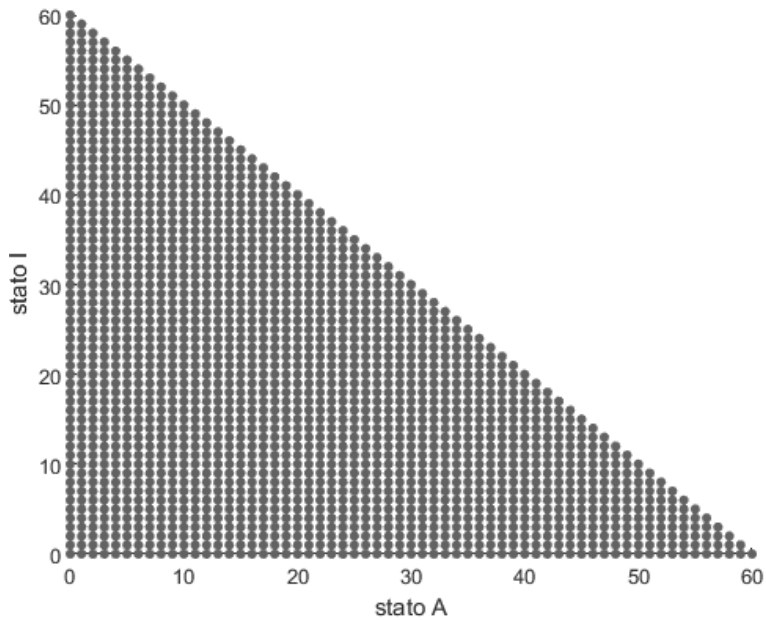
L'equilibrio attuariale per una polizza LCA-GLWB scritta su una testa di età pari a 60 anni e di sesso maschile, con parametri $K = 220$, $g = 2\%$, $\delta = 6\%$, $w_0 = 100.000\text{€}$ e $N = 10.000$ è ottenuta in funzione del parametro α^* che minimizzi la differenza:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{\omega-x-1} (e^{-r(t)} (Uscite_{t,1,i}) - W_0) = 0 \quad (40)$$

Il valore ottenuto è $\alpha^* = 0.005$.

La metodologia T.I.E. impiegata in questa applicazione ha generato 1891 traiettorie ritenute ammissibili secondo i criteri assiomatici fissati nella sezione 3.2., vedi Figura 2.

Figura 2. Rappresentazione grafica dell'insieme $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ formato dai punti $P(z_1, z_2)$



Fonte: elaborazione propria degli autori

6. Conclusioni

Questo lavoro ha applicato la metodologia T.I.E. al problema del pricing di polizze con componente multistato come le polizze LCA-GLWB. Dopo aver calcolato le traiettorie ritenute ammissibili secondo la base assiomatica enunciata nella sezione 3, si è convertito ogni vettore probabilizzato rappresentativo di una

traiettoria ammissibile in un vettore contenente il flusso monetario, calcolato sulla base delle specifiche previste dal contratto assicurativo.

La scelta di tale metodologia è dovuta alla capacità del modello attuariale adottato di descrivere completamente lo spazio campionario associato al life-cycle della testa assicurata.

La componente finanziaria del contratto è stata modellata nel discreto attraverso un modello stocastico alla Heston in modo da considerare aleatori sia il rendimento della componente stock che la volatilità.

Intento futuro degli autori è quello di ricavare, come mostrato in Cairns et al. (2006), le basi tecniche utilizzate nella seconda fase del metodo *T.I.E* da un processo stocastico di tipo diffusivo, in aggiunta all'impiego di un modello di tipo Hull-White per una analisi in termini stocastici del tasso d'interesse.

References

- ANGRISANI M. (1999), *Un modello di gestione di un fondo pensione I.V.S. a traiettorie individuali esatte*, XXIII Convegno AMASES, Rende.
- ANGRISANI M., ATTIAS A. (2004), A mathematical model for management of an Invalidity Old Age Survivor Pension Fund: The Exact Individual Trajectories Method, *Pure Mathematics and Applications*, 15(1), pp. 1-5.
- BACINELLO A.R., MILLOSSOVICH P., OLIVIERI A. PITACCO E. (2011), Variable annuities: a unifying valuation approach, *Insurance: Mathematics and Economics*, 49, pp. 285-297.
- BROADIE, M., KAYA, O. (2006), Exact Simulation of Stochastic Volatility and other Affine Jump Diffusion Processes, *Journal of Operations Research*, 54 (2), pp. 217-231.
- BROWN J., WARSHAWSKY M. (2013), The life care annuity: a new empirical examination of an insurance innovation that addresses problems in the markets for life annuities and long-term care insurance, *Journal of Risk Insurance*, 80, pp. 677-704.
- BRUNO M.G., FAVA P., GRANDE A., SCARPITTI M.R. (2019), Option Pricing con volatilità stocastica: analisi ed implementazione del modello di Heston, *Annali Memotef*, pp. 27-47.
- CAIRNS A., BLAKE D., DOWD K. (2006), Pricing death: framework for valuation and securitization of mortality risk, *ASTIN Bulletin*, 36, pp. 79-120.
- COPPINI M. A. (1979a), *Lezioni di tecnica delle assicurazioni sociali*, Veschi, Roma.
- COPPINI M. A. (1979b), *The method of demographic and financial projections on an individual basis and by means of random drawings* (MAGIS), VII Conferenza Internazionale degli Attuari e Statistici della Scienza Sociale, Acapulco.
- DE ANGELIS P., DI FALCO L. (2016), *Assicurazioni sulla salute: caratteristiche, modelli attuariali e basi tecniche*, Il Mulino, Bologna.
- ELING M., GHAVIBAZOO O. (2018), Research on long-term care insurance: status quo and directions for future research, *Geneva Papers on Risk and Insurance*.
- GATHERAL J. (2006), *The Volatility Superface: A Practitioner's Guide*, J.Wiley & Sons, London.
- GLASSERMAN P. (2003), *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer.
- HABERMAN S., PITACCO E. (1999), *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman and Hall, London.
- HESTON L. (1993), Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options, *The Review of Financial Studies*, 6(2), pp. 327-343.
- HSIEH M. H, WANG J. L., CHIU Y. F. CHEN Y. C. (2018), Valuation of variable long-term care Annuities with Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefits: A variance reduction approach, *Insurance: Mathematics and Economics*, 78, pp. 246-254.
- KHAL C., JACKEL P. (2006), Fast Strong Approximation Monte-Carlo Schemes for Stochastic Volatility Models, *Quantitative Finance*, 6, pp. 513-536.
- LEVANTESI S., MENZIE'TTI M. (2012), Managing longevity and disability risks in life annuities with long term care, *Insurance: Mathematics and Economics*, 50(3), pp. 391-401.
- MURTAUGH C., SPILLMAN B., WARSHAWSKY M. (2001), In sickness and in health: An annuity approach to financing long-term care and retirement income, *Journal of Risk Insurance*, 68, pp. 225-253.

- SCORRANO M. (2015), On the pricing of the GLWB option in a Variable Annuity contract, *DEAMS Research Paper 1*.
- TOMASSETTI A. (1973), Su lle valutazioni attuariali dei salari e degli oneri annui con estrazione a sorte per il passaggio di stato degli assicurati e dei pensionati, *Quaderni dell'Istituto di Scienze attuariali dell'Università di Roma*.
- TOMASSETTI A. (1979), The MAGIS method: applications; probabilities of shifts in family status, *Transactions of the VII International Conference of Social Security Actuaries and Statisticians. Acapulco*.
- TOMASSETTI A. et al. (1986), *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni sociali*, Veschi, Roma.
- TOMASSETTI A. et al. (1996). *Tecnica attuariale per collettività*. Ed. Kappa, Roma.
- WEEB D. (2009), Asymmetric information, long-term care insurance, and annuities: the case for bundled contracts, *Journal of Risk Insurance*, 76, pp. 231-241.