



SAPIENZA
UNIVERSITÀ EDITRICE

ANNALI DEL DIPARTIMENTO DI METODI
E MODELLI PER L'ECONOMIA
IL TERRITORIO E LA FINANZA

2019

Direttore Responsabile - Director

Alessandra De Rose

Direttore Scientifico - Editor in Chief

Roberta Gemmiti

Curatrici del numero - Managing Editors

Adriana Conti Puorger, Cristina Giudici

Comitato Scientifico - Editorial Board

Maria Giuseppina Bruno (Sapienza Università di Roma)

Adriana Conti Puorger (Sapienza Università di Roma)

Alessandra Faggian (The Ohio State University)

Francesca Gargiulo (Sapienza Università di Roma)

Roberta Gemmiti (Sapienza Università di Roma)

Cristina Giudici (Sapienza Università di Roma)

Ersilia Incelli (Sapienza Università di Roma)

Antonella Leoncini Bartoli (Sapienza Università di Roma)

Isabella Santini (Sapienza Università di Roma)

Marco Teodori (Sapienza Università di Roma)

Catherine Wihtol de Wenden (CERI-Sciences Po-CNRS Paris).

Copyright © 2019

Sapienza Università Editrice

Piazzale Aldo Moro 5 – 00185 Roma

www.editricesapienza.it

editrice.sapienza@uniroma1.it

Iscrizione Registro Operatori Comunicazione n. 11420

ISSN: 2385-0825

Pubblicato a dicembre 2019



Quest'opera è distribuita
con licenza Creative Commons 3.0
diffusa in modalità *open access*.

COPULE CONDIZIONATE: APPLICAZIONE NEL CALCOLO DEL VALUE-AT-RISK

Abstract: We suggest a method with a view to compute the Value-at-Risk of a portfolio composed by two stock indices. In order to model the dependence between the two indices we use a conditional copula model, in particular we assume Archimedean copula and the parameter of the copula is function of another variable, that is a volatility index in this work. We use a non-parametric approach in order to estimate the function. With a view to model the individual indices we use an $AR(1)$ process in order to compute the conditional means and a $GARCH(1,1)$ process in order to compute the conditional variances. Finally the Value-at-Risk estimates are checked through the test of Kupiec and the test of Christoffersen and the estimates that passes the verification are compared through the AIC.

Parole chiave: copula condizionata, stima semi parametrica, calcolo del Value-at-Risk.

1. Introduzione

Il Value-at-Risk, di seguito VaR , è una delle misure di rischio maggiormente diffuse, anche se relativamente recente. Inizialmente è stata costruita dalla banca di affari J. P. Morgan ad uso interno, solo nel 1994 viene reso pubblico il suo utilizzo in ambito finanziario. Si tratta, di una misura di rischio che la regolamentazione richiede di calcolare alle istituzioni finanziarie. Il VaR ha come obiettivo il calcolo, ad un certo livello di confidenza, solitamente posto al 95% o 99%, della perdita massima potenziale in un certo intervallo di tempo, solitamente da un giorno fino ad un mese ed oltre, di un certo portafoglio di investimenti, anche composto da asset eterogenei. Ne segue che tale misura mira a sintetizzare in un unico numero l'esposizione al rischio data da diversi fattori e questo ne giustifica la sua ampia diffusione; le istituzioni finanziarie possono essere esposte a molteplici ed eterogenee cause di rischio perciò in questo modo si riesce ad operare un'estrema sintesi. Le metodologie di calcolo sono diverse, la più semplice è quella delle simulazioni storiche dove si approssima la distribuzione dei profitti e delle perdite in base ai dati storici, in tal caso il VaR ad un livello di confidenza $1 - \alpha$ sarà il quantile α -esimo della serie.

In dettaglio, l'ambito di riferimento è quello della stima del VaR di portafoglio giornaliero nel quale la dipendenza delle varie componenti è modellata mediante una copula. In letteratura sono già presenti tali modelli: in Palaro et al. (2006) la copula si assume costante nel tempo; in Patton (2002), al contrario, la funzione non è costante in quanto, scelta una certa famiglia parametrica, si assume che i relativi parametri seguano una dinamica parzialmente simile ad un processo autoregressivo.

Lo scopo di questo lavoro è quello di proporre, per i dati finanziari, un metodo alternativo al fine di esprimere la dinamica dei parametri della copula condizionata, in particolare si assume che questi siano funzione di una covariata, non necessariamente il tempo, e su tale relazione non viene fatta alcuna restrizione circa la relativa forma funzionale poiché viene stimata utilizzando un approccio di tipo non parametrico come indicato in Acar et al. (2011).

* Sapienza University of Rome

Pertanto, dopo aver calibrato i parametri sulla base dei dati storici, si utilizza il metodo Monte Carlo al fine di ottenere un'approssimazione della distribuzione dei profitti e delle perdite del portafoglio da cui, ricavando il relativo quantile, si ottiene il *VaR* richiesto.

L'utilizzo delle copule è giustificato dal fatto che in tale ambito è agevole formalizzare varie distribuzioni congiunte per i vettori aleatori, superando l'ipotesi di normalità multivariata, la quale è relativamente semplice da implementare poiché le correlazioni, varianze e medie si possono stimare dai dati storici; tuttavia, è ben noto che in ambito finanziario essa trova pochissima evidenza. Dal teorema di Sklar (1959) si ha che, nel caso bivariato essendo F_{X_1, X_2} una generica funzione di ripartizione, essa può esprimersi come

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right) \quad (1)$$

dove C è una funzione di ripartizione congiunta con marginali uniformi in $(0,1)$ e prende il nome di copula; se le marginali sono continue allora la rappresentazione (1) è unica. Calcolando la derivata parziale mista si ottiene la densità congiunta:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$

questa ultima formula mostra che, seguendo tale approccio, si può isolare la struttura di dipendenza dalla forma delle marginali. Ne segue che è possibile combinare le distribuzioni marginali con varie strutture di dipendenza in modo da ottenere distribuzioni congiunte seguendo, pertanto, un approccio di tipo bottom-up, ed eventualmente scegliere quella che meglio si adatta ai dati. Infatti, nella pratica, spesso si hanno maggiori informazioni sulle distribuzioni marginali piuttosto che sulla distribuzione congiunta.

Nei mercati finanziari solitamente la correlazione tra fattori di rischio è più elevata nelle fasi di contrazione del mercato. Per tenere conto di questa dimensione temporale, si utilizzano copule condizionate e per fare ciò il teorema di Patton (2002) estende quello di Sklar al caso di distribuzioni condizionate: consideriamo il vettore aleatorio (X_1, X_2, X_3) e siano:

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2 | X_3 = x_3}(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 | X_3 = x_3) \\ F_{X_1 | X_3 = x_3}(x_1) &= P(X_1 \leq x_1 | X_3 = x_3) \\ F_{X_2 | X_3 = x_3}(x_2) &= P(X_2 \leq x_2 | X_3 = x_3) \end{aligned}$$

allora ne segue che esiste una rappresentazione:

$$C_{X_3 = x_3}\left(F_{X_1 | X_3 = x_3}(x_1), F_{X_2 | X_3 = x_3}(x_2)\right) = F_{X_1, X_2 | X_3 = x_3}(x_1, x_2)$$

dove con $C_{X_3 = x_3}$ si indica la copula condizionata da $X_3 = x_3$. In tal caso, oltre alle condizioni del teorema di Sklar occorre assumere l'ipotesi aggiuntiva che le marginali e la copula siano condizionate alla medesima variabile, che prende il nome di covariata.

Il modello che utilizzeremo è, come già in parte anticipato, simile a quello utilizzato in Palaro et al., (2006); nel nostro caso le famiglie parametriche delle copule implementate dipendono da un unico parametro ϑ che non viene assunto costante, bensì funzione di una covariata; tale funzione è stimata come proposto in Acar et al., (2011).

2. Stima del Value-at-Risk

2.1. Modello matematico

Indichiamo con S_{it} il prezzo di chiusura dell'indice i -esimo al tempo t ; allora il log-rendimento y_{it} è dato da:

$$y_{it} = \ln\left(\frac{S_{it}}{S_{it-1}}\right), \quad i = \{1,2\}$$

da cui per $i = \{1,2\}$, assumendo una struttura di tipo $ARMA(h, k)$ e $GARCH(p, q)$

$$y_{it} = \mu_i + \sum_{j=1}^h \gamma_{ij} y_{it-j} + \sum_{j=1}^k \delta_{ij} \varepsilon_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_{it} = \sigma_{it} z_{it} \tag{2}$$

$$\sigma_{it}^2 = \omega_i + \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} \varepsilon_{it-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \sigma_{it-j}^2$$

$$z_{it} | \mathcal{F}_{t-1} \sim WN(0,1) \tag{3}$$

dove \mathcal{F}_{t-1} indica la σ -algebra degli eventi generati dal processo fino al tempo $t - 1$. Come spesso si assume in letteratura, la parte MA è posta pari a zero, cioè $k = 0$, mentre per semplicità si fissano $h = p = q = 1$. Inoltre, per quanto riguarda i processi white noise, si utilizzano le distribuzioni normale standard e la t -Student standardizzata; questa ultima è usata per catturare l'eventuale pesantezza delle code tipica delle serie finanziarie.

Inoltre, utilizzando le espressioni (2) e (3), è possibile calcolare immediatamente il valore della funzione di ripartizione in z_{it} ,

$$u_{it} = F_{z_{it} | \mathcal{F}_{t-1}}(z_{it}), \quad i = \{1,2\}$$

la cui distribuzione è, per la "trasformazione integrale", uniforme nell'intervallo (0,1) mentre la legge congiunta è modellata mediante una copula condizionata,

$$(U_{1t}, U_{2t} | \mathcal{F}_{t-1}) \sim C(\cdot | \mathcal{F}_{t-1})$$

le forme parametriche delle copule utilizzate nel seguito sono la Gumbel, Clayton e Frank; esse dipendono da un unico parametro che può essere interpretato come "intensità di dipendenza". Esso è in relazione crescente con il τ di Kendall. Inoltre, la copula di Gumbel conferisce maggiore dipendenza nella coda superiore, quella di Clayton in quella inferiore e la Frank è simmetrica ed è anche l'unica idonea a catturare la dipendenza negativa, a causa delle restrizioni sul supporto del parametro ϑ ; combinando i due processi white noise con le tre tipologie di copule si ha un totale di sei modelli.

Di seguito si riportano le funzioni di ripartizione rispettivamente per la Gumbel, Clayton e Frank:

$$C(u_1, u_2) = e^{-((- \ln u_1)^\vartheta + (- \ln u_2)^\vartheta)^{\frac{1}{\vartheta}}} \quad \vartheta \geq 1$$

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\vartheta} + u_2^{-\vartheta} - 1)^{-\frac{1}{\vartheta}} \quad \vartheta > 0$$

$$C(u_1, u_2) = -\frac{1}{\vartheta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\vartheta u_1} - 1)(e^{-\vartheta u_2} - 1)}{e^{-\vartheta} - 1} \right) \quad \vartheta \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Assumiamo che il condizionamento operi sul parametro ϑ ; in particolare che esso sia funzione del valore della covariata, che indichiamo con X , al giorno precedente. Ne segue che:

$$C(\cdot | \mathcal{F}_{t-1}) = C(\cdot | \vartheta(X_{t-1})) = C(\cdot | \vartheta_t)$$

il supporto di ϑ_t , a seconda del tipo di copula utilizzata, può variare. Al contrario, quello di X_{t-1} coincide in genere con la retta reale. È necessario allora introdurre una funzione di link.

$$\vartheta_t = \vartheta(X_{t-1}) = \psi^{-1}(\eta(X_{t-1}))$$

cioè:

$$\psi(\vartheta_t) = \eta(X_{t-1})$$

dove $\psi : \theta \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione ausiliaria che mappa i numeri reali su tutto il supporto di ϑ e solitamente si assume nota oppure, più realisticamente, se ne sceglie una ad hoc in modo da assicurare che il valore di tale parametro sia sempre accettabile per la famiglia di copule prescelta. Senza perdere di generalità, si ipotizza che sia anche invertibile. In tal caso ψ^{-1} è detta funzione di collegamento mentre η è detta funzione di calibrazione, poiché da questa ultima dipende la relazione tra X_{t-1} e la dipendenza tra le variabili, parametrizzata nel modello da ϑ . Di seguito si riportano le funzioni di collegamento utilizzate rispettivamente per la Gumbel, Clayton e Frank:

$$\psi^{-1}(x) = e^x + 1$$

$$\psi^{-1}(x) = e^x$$

$$\psi^{-1}(x) = x, x \neq 0.$$

La funzione η è oggetto di inferenza; su di essa non assumiamo alcuna restrizione circa la forma funzionale. Essa viene approssimata localmente mediante un polinomio di Taylor, tale procedura verrà esposta in dettaglio nel paragrafo successivo.

Infine, indicando con V_t il valore di chiusura del portafoglio al tempo t e con n_i il numero delle quote assolute di indice i -esimo, si ha che:

$$V_t = \sum_{i=1}^m n_i S_{it}$$

Inoltre, sia w_i la quota relativa, detenuta in portafoglio di indice i -esimo, pertanto:

$$w_i = \frac{n_i S_{it}}{\sum_{j=1}^m n_j S_{jt}}$$

ed indicando con r_t il log-rendimento del portafoglio, si ha che:

$$r_t = \ln\left(\frac{V_t}{V_{t-1}}\right) = \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^m n_i S_{it}}{\sum_{i=1}^m n_i S_{it-1}}\right) = \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^m n_i S_{it-1} e^{y_{it}}}{\sum_{i=1}^m n_i S_{it-1}}\right)$$

dal quale si ottiene il rendimento logaritmico del portafoglio a partire dai log-rendimenti degli indici che lo compongono. Si ottiene infatti:

$$r_t = \ln\left(\sum_{i=1}^m w_i e^{y_{it}}\right) \quad (4)$$

nel nostro caso $m = 2$, mentre le quote si pongono arbitrariamente pari a $w_i = \frac{1}{2} \forall i$, cioè si considera il portafoglio equi-pesato ed equivale ad assumere che alla fine di ogni periodo sia possibile aggiustare le quote assolute in modo da lasciare inalterate le quote relative.

2.2. Metodo di inferenza

La tecnica utilizzata per calcolare i *VaR* si basa sul metodo del “rolling windows”, come è comune fare in tale ambito. Supponiamo di avere il seguente campione (S_{1t}, S_{2t}, X_t) , $t = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ dal quale si ottengono le seguenti n osservazioni dei rendimenti logaritmici $(y_{1t}, y_{2t}, X_{t-1})$, $t = \{1, 2, \dots, n\}$, da queste selezioniamo le prime s e andiamo a calibrare i *GARCH* ottenendo le stime dei residui standardizzati $(\hat{z}_{1t}, \hat{z}_{2t})$, $t = \{1, 2, \dots, s\}$ da cui calcolare il valore della funzione di ripartizione, pertanto indicando con ϑ_m il vettore dei parametri dei *GARCH* si ottiene:

$$\hat{u}_{it} = F_{Z_{it}|\mathcal{F}_{t-1}}(\hat{z}_{it}|\hat{\vartheta}_m) \quad t = \{1, 2, \dots, s\}, i = \{1, 2\}$$

Questi ultimi valori sono poi utilizzati per stimare il parametro di copula condizionata. L’idea di stimare separatamente le marginali e successivamente la copula prende il nome di “Inference for Margins” (IFM); tale metodo è computazionalmente più semplice anche se statisticamente meno efficiente della stima congiunta, poiché nella stima dei parametri della copula non si tiene conto dell’incertezza relativa alla stima delle componenti marginali.

Pertanto, si ottiene la seguente funzione di log-verisimiglianza:

$$\sum_{t=1}^s \ln\left(c\left(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t}|\psi^{-1}(\eta(X_{t-1}))\right)\right).$$

Si assuma che nel punto X_s , la funzione η possieda $r + 1$ derivate continue. Allora:

$$\begin{aligned} \eta(X_{t-1}) &= \eta(X_s) + \eta'(X_s)(X_{t-1} - X_s) + \frac{\eta''(X_s)}{2}(X_{t-1} - X_s)^2 + \frac{\eta'''(X_s)}{6}(X_{t-1} - X_s)^3 + \dots \\ &\dots + \frac{\eta^{(r)}(X_s)}{r!}(X_{t-1} - X_s)^r + o(X_{t-1} - X_s)^r, \quad t = \{1, 2, \dots, s\} \end{aligned}$$

cioè $\eta(X_{t-1})$ è calcolata mediante approssimazione locale nel punto X_s con un polinomio di Taylor di grado r . Inoltre, si pone:

$$\beta_j = \eta^{(j)}(X_s), \quad \alpha_{tj} = \frac{(X_{t-1} - X_s)^j}{j!} \quad j = \{0, 1, 2, \dots, r\}, t = \{1, 2, \dots, s\}.$$

Ne segue che α_{tj} sono noti e occorre stimare i β_j . Pertanto, si riscrive la funzione di log-verisimiglianza locale nel modo che segue:

$$L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) = \sum_{t=1}^s \ln \left(c \left(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t} | \psi^{-1} \left(\sum_{j=0}^r \beta_j \alpha_{tj} \right) \right) \right)$$

e questa è una buona approssimazione per X_s nelle vicinanze di X_{t-1} . In tal modo, è ragionevole introdurre un peso locale mediante funzione di tipo kernel:

$$L_k(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) = \sum_{t=1}^s \ln \left(c \left(\hat{u}_{1t}, \hat{u}_{2t} | \psi^{-1} \left(\sum_{j=0}^r \beta_j \alpha_{tj} \right) \right) \right) \frac{1}{\delta} k \left(\frac{X_{t-1} - X_s}{\delta} \right)$$

dove k e δ sono rispettivamente la funzione kernel con il suo bandwidth. Quest'ultimo, per semplicità computazionale, viene posto arbitrariamente pari al quinto percentile della serie $|X_{t-1} - X_s|$. La funzione kernel utilizzata è quella di tipo *triweight* definita nel modo seguente (Baszczynska, 2016):

$$k(x) = \frac{35}{32} (1 - x^2)^3 \mathbb{I}_{\{|x| \leq 1\}}.$$

Quest'ultimo, rispetto ai più comuni kernel, di tipo Epanechnikov e gaussiano, ha la proprietà di avere le code più "leggere", cioè di penalizzare maggiormente i valori X_{t-1} distanti da X_s , proprio dove l'approssimazione locale è meno precisa.

Massimizzando L_k si ottiene la stima dei parametri, in particolare $\hat{\beta}_0 = \hat{\eta}(X_s)$. Ne segue che:

$$\hat{\vartheta}_{s+1} = \psi^{-1}(\hat{\eta}(X_s)) = \psi^{-1}(\hat{\beta}_0).$$

Avendo stimato il parametro di copula si può ricavare la distribuzione di r_{s+1} ; come già anticipato viene approssimata mediante il metodo Monte Carlo. Pertanto, si generano 10^4 realizzazioni dalla copula $C(\cdot | \hat{\vartheta}_{s+1})$ che indichiamo con:

$$(v_1^{(m)}, v_2^{(m)}) , \quad m = \{1, 2, \dots, 10^4\}$$

dai quali, considerando la struttura *GARCH*, si calcola la funzione inversa per ottenere i residui standardizzati. Pertanto:

$$z_i^{(m)} = F_{z_{it}|x_{t-1}}^{-1}(v_i^{(m)}), \quad i = \{1, 2\}, m = \{1, 2, \dots, 10^4\}$$

Inoltre, è possibile effettuare la previsione della varianza condizionata al giorno $s + 1$ mediante la parte *GARCH*:

$$\hat{\sigma}_{i,s+1}^2 = \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{i,s}^2 + \beta_i \sigma_{i,s}^2, \quad i = \{1,2\}$$

con la quale calcolare i residui per ogni prova:

$$\varepsilon_i^{(m)} = \hat{\sigma}_{i,s+1} z_i^{(m)} \quad \forall i = \{1,2\}, \quad m = \{1,2, \dots, 10^4\}$$

e si inseriscono nella parte *AR* per calcolare i log-rendimenti, cioè:

$$y_i^{(m)} = \mu_i + \gamma_i y_{i,s+1} + \varepsilon_i^{(m)}, \quad i = \{1,2\}, \quad m = \{1,2, \dots, 10^4\}.$$

In conclusione, si calcola il log-rendimento di portafoglio:

$$r^{(m)} = \ln \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 e^{y_i^{(m)}} \right), \quad m = \{1,2, \dots, 10^4\}.$$

In questo modo si ottiene un'approssimazione della distribuzione del rendimento di portafoglio alla $(s + 1)$ -esima osservazione. I quantili al livello 0,01 e 0,05 forniscono il *VaR* rispettivamente al livello 99% e 95%.

Tale procedura appena descritta viene iterata prendendo $(y_{1t}, y_{2t}, X_{t-1}), t = \{2, 3, \dots, s + 1\}$ mediante i quali possono essere calibrati i parametri della struttura *GARCH*. Successivamente si calcola l'approssimazione locale in X_{s+1} , si ottiene la stima di ϑ_{s+2} con cui infine si può lanciare la simulazione per ottenere l'approssimazione della distribuzione di r_{s+2} ed i relativi *VaR* giornalieri. Si procede in questo modo fino a completare tutto il campione. Per ogni modello si ottengono due serie di dimensione $n - s$ di *VaR* giornalieri.

Queste sono confrontate con i log-rendimenti effettivamente realizzati dal portafoglio mediante i test di Kupiec e Christoffersen per verificare la precisione della stima. Indichiamo con $VaR_t(\alpha)$ il *VaR* al tempo t calcolato ad un livello di confidenza $1 - \alpha$ e definiamo le seguenti variabili indicatrici:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{per } r_t < VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{per } r_t \geq VaR_t(\alpha) \end{cases}$$

$$\rho = \sum_{t=s+1}^n I_t$$

dove con r_t abbiamo indicato la serie dei log-rendimenti effettivamente realizzati dal portafoglio calcolati mediante la (4).

Il test di Kupiec verifica l'ipotesi nulla che la probabilità che il *VaR* sia violato sia pari ad α , cioè

$$P(I_t = 1) = \alpha$$

In tal caso si dimostra che la seguente *likelihood* ratio:

$$LR = 2 \ln \left[\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{n-\rho} \left(\frac{\rho}{n}\right)^\rho \right] - 2 \ln[(1 - \alpha)^{n-\rho} (\alpha)^\rho]$$

converge asintoticamente in distribuzione ad una *v. a.* Chi-quadro con 1 grado di libertà. Il test di Christoffersen verifica congiuntamente sia l'ipotesi del test di Kupiec che quella dell'indipendenza delle violazioni del *Var*, cioè:

$$P(I_t = 1 | I_{t-1} = 1) = P(I_t = 1 | I_{t-1} = 0) = \alpha$$

e si utilizza la seguente *likelihood* ratio:

$$LR = 2 \ln[(1 - p_{01})^{x_{00}} (p_{01})^{x_{01}} (1 - p_{11})^{x_{10}} (p_{11})^{x_{11}}] - 2 \ln[(1 - \alpha)^{n-\rho} (\alpha)^\rho]$$

dove x_{ij} indica il numero di volte che si verifica l'evento $\{I_{t-1} = i, I_t = j\}$, mentre $p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^2 x_{ij}}$. Se l'ipotesi congiunta è vera allora $\alpha = p_{11} = p_{01}$, si dimostra che la *LR* converge asintoticamente in distribuzione ad una *v. a.* Chi-quadro con 2 gradi di libertà.

I modelli che per entrambi i test ottengono dei valori di *p-value* superiori a 0.05 sono confrontati tra loro mediante il calcolo dell'*AIC* (Akaike, 1974). In questo caso la stima dei parametri tiene conto dell'intero campione. Pertanto, dopo aver calibrato i *GARCH* utilizzando le osservazioni dell'intero campione dal quale si ottengono $(\hat{z}_{1t}, \hat{z}_{2t}), \forall t \in \{1, 2, \dots, n\}$, cioè le stime dei residui standardizzati; l'approssimazione locale descritta sopra viene iterata $\forall X_s : s \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ attraverso la quale si ottiene $\{\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \dots, \hat{\vartheta}_n\}$, cioè le stime dei parametri delle copule condizionate. Infine, si calcola il valore della log-verosimiglianza calcolata nel modo seguente nel valore dei parametri stimati:

$$L(\hat{\vartheta}_m, \hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \dots, \hat{\vartheta}_n) = \sum_{t=1}^n \ln \left(c(F_{Z_{1t}|F_{t-1}}(\hat{z}_{1t}), F_{Z_{2t}|F_{t-1}}(\hat{z}_{2t}) | \hat{\vartheta}_t) f_{Z_{1t}|F_{t-1}}(\hat{z}_{1t}) f_{Z_{2t}|F_{t-1}}(\hat{z}_{2t}) \right)$$

dove con $\hat{\vartheta}_m$ si indica il vettore dei parametri dei *GARCH*, indicando con *D* il numero dei parametri totali del modello, si calcola il seguente valore:

$$AIC = 2(D - L)$$

ne segue che il modello migliore è quello che minimizza l'*AIC*.

3. Dati e risultati

3.1 Dataset

I dati sono stati ricavati da Bloomberg e contengono i prezzi di chiusura giornalieri degli indici *S&P 100*, *FTSE 100* e *VIX*, dal 2 gennaio 2003 al 29 dicembre 2017 per un totale di 3858 osservazioni. Avendo utilizzato per il rolling windows una finestra di ampiezza $s = 10^3$, ed avendo calcolato, per ogni giorno, il *Var* al 95% e 99% si ottengono, per ogni modello, due serie di dimensione pari a 2857, inoltre per l'approssimazione locale si è utilizzato un polinomio di Taylor di grado $r = 5$.

I primi due indici sono un paniere di 100 azioni delle aziende più capitalizzate, rispettivamente del mercato americano, NYSE e NASDAQ, e del mercato inglese, London Stock Exchange, in realtà possono essere più di cento se una società ha più tipologie di azioni come ad esempio la holding di Google. Il *VIX*, invece, non è di tipo azionario bensì è un indice di volatilità calcolato¹ sulla base dei prezzi delle opzioni call e put scritte sull'indice *S&P 500* con una scadenza intorno ai 30 giorni con diversi prezzi di esercizio; per tale

¹ Prima del 2004 il calcolo si basava sulla volatilità implicita nel prezzo sulla base delle formule di Black-Scholes, da quel momento la metodologia è cambiata e utilizza direttamente i prezzi delle opzioni, l'indice forward di queste e i prezzi di esercizio; tutta la serie storica del campione è quella che fa riferimento a questa ultima tipologia di calcolo.

ragione è conosciuto come “indice della paura”, ed è quello che utilizziamo come covariata. Inoltre, occorre tener presente che ci si è posti nella prospettiva di un investitore americano, pertanto il portafoglio costruito con i due indici azionari è denominato in dollari ed anche il *FTSE 100* viene espresso in questa valuta sulla base del tasso di cambio di chiusura del giorno di riferimento. Di seguito sono riportati i grafici delle serie storiche degli indici

Figura 1. Serie dei prezzi S&P 100



Figura 2. Serie dei prezzi FTSE 100

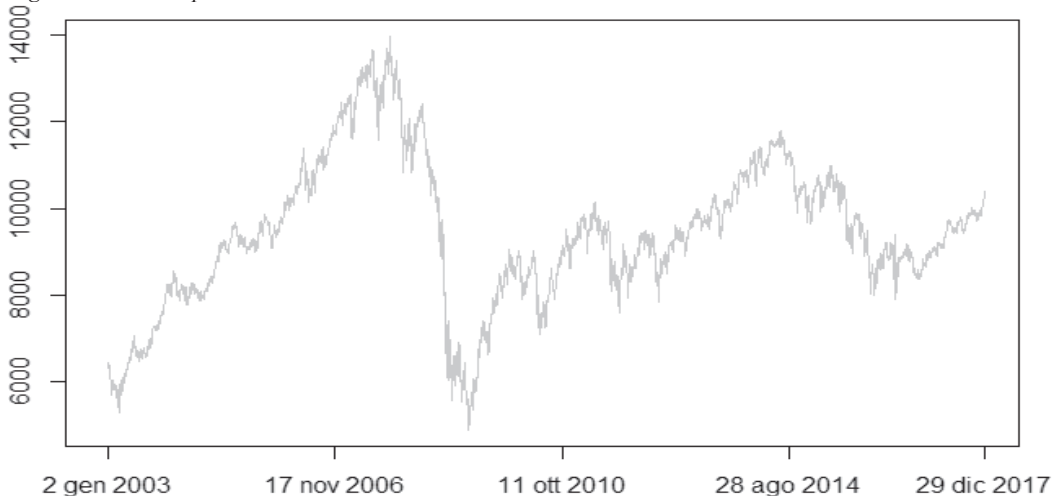
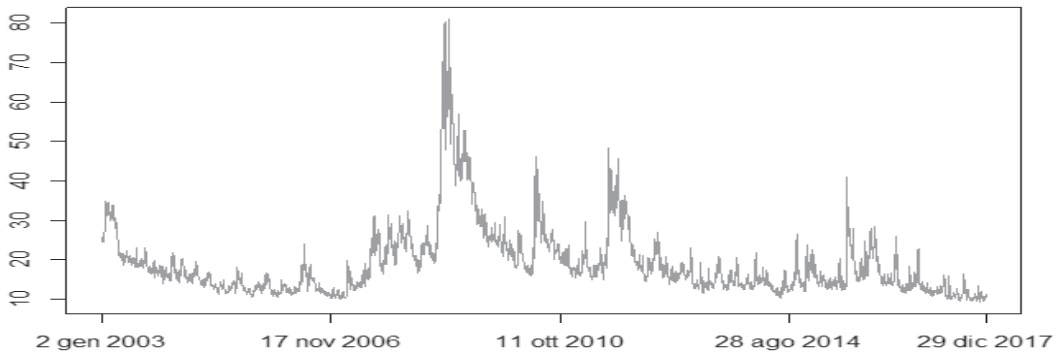


Figura 3. Serie dei livelli VIX



Infine, presentiamo la serie dei log-rendimenti degli indici azionari ed alcune statistiche descrittive. Si può notare come siano presenti alcuni fatti stilizzati per le serie finanziarie, in particolare: i cluster di volatilità, maggiormente evidenziati dalla serie dei rendimenti logaritmici quadratici, ed il rifiuto dell'ipotesi della distribuzione gaussiana: infatti per entrambe le serie, il p -value del test di Jarque-Bera è prossimo a zero.

Figura 4. Serie dei log-rendimenti S&P100

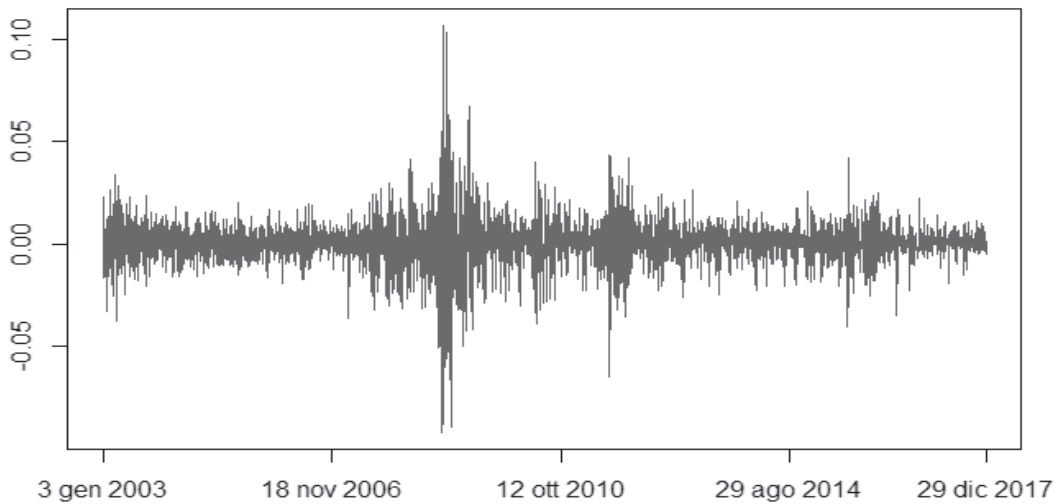


Figura 5. Serie dei log-rendimenti quadratici S&P100

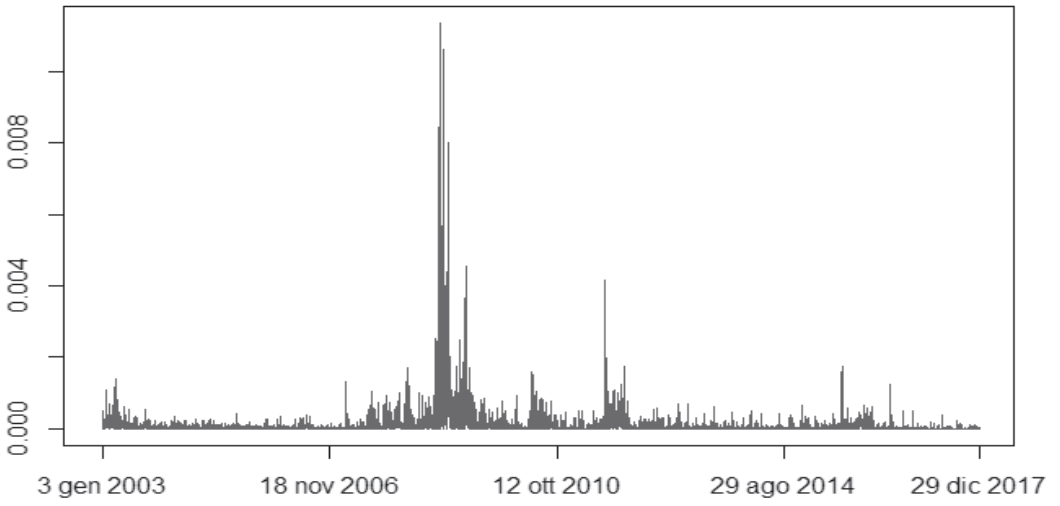


Figura 6. Serie dei log-rendimenti FTSE 100

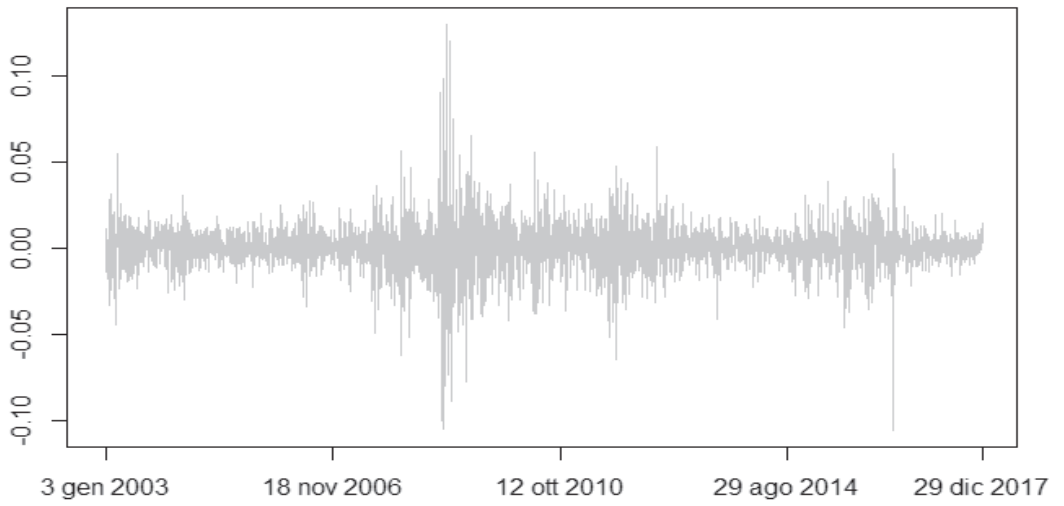


Figura 7. Serie dei log-rendimenti quadratici FTSE 100

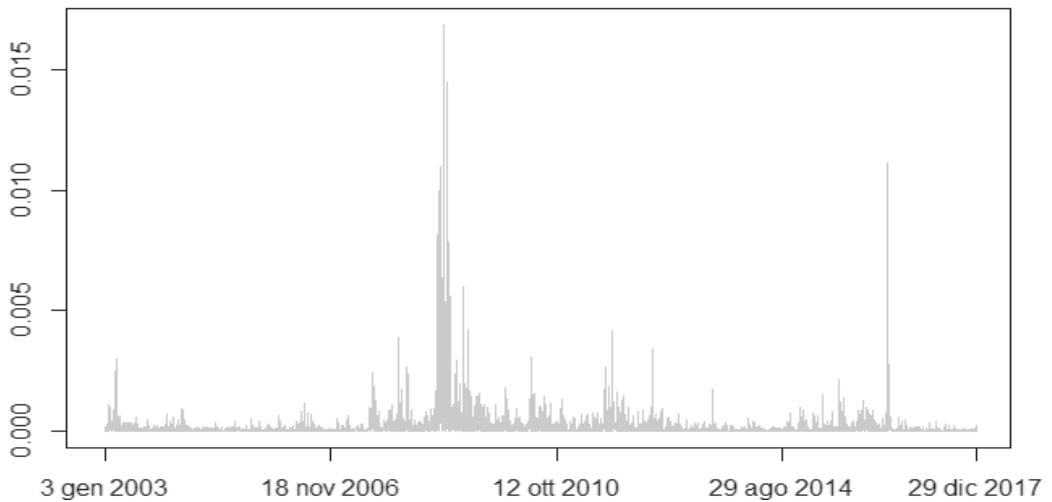


Tabella 1. Statistiche descrittive serie dei log-rendimenti S&P 100

Rendimenti S&P 100			
Minimo	$-9,862 \times 10^{-2}$	Media	$2,452 \times 10^{-4}$
Primo quartile	$-3,9971 \times 10^{-3}$	Varianza	$1,2478 \times 10^{-4}$
Mediana	$6,061 \times 10^{-4}$	Asimmetria	-0.2718703
Terzo quartile	$5,0964 \times 10^{-3}$	Curtosi	$14,95225$
Massimo	$1,065506 \times 10^{-1}$	Jarque-Bera (p-value)	$< 2,2 \times 10^{-16}$

Tabella 2. Statistiche descrittive serie dei log-rendimenti FTSE 100

Rendimenti FTSE 100			
Minimo	$-1,056 \times 10^{-1}$	Media	$1,262 \times 10^{-4}$
Primo quartile	$-5,8712 \times 10^{-3}$	Varianza	$1,836558 \times 10^{-4}$
Mediana	$6,596 \times 10^{-4}$	Asimmetria	-0.172506
Terzo quartile	$6,7211 \times 10^{-3}$	Curtosi	$14,06288$
Massimo	$1,298725 \times 10^{-1}$	Jarque-Bera (p-value)	$< 2,2 \times 10^{-16}$

3.2. Parametri stimati e test

I test utilizzati, come già anticipato, sono quelli di Kupiec e Christoffersen. Prima di illustrare i risultati, vengono mostrate alcune statistiche descrittive circa la distribuzione di alcuni parametri stimati ripetutamente nella procedura prima descritta. In particolare, i gradi di libertà della *t*-Student standardizzata relativa agli indici ed i bandwidth utilizzati:

Tabella 3. Statistiche descrittive gradi di libertà *t*-student S&P 100 durante il rolling windows

GdL <i>t</i> -Student S&P 100					
Minimo	Primo quartile	Mediana	Terzo quartile	Massimo	Media
4,139	5,146	5,519	6,242	22,820	6,007

Tabella 4. Statistiche descrittive gradi di libertà t-student FTSE 100 durante il rolling windows

GdL t-Student FTSE 100					
Minimo	Primo quartile	Mediana	Terzo quartile	Massimo	Media
4,791	6,931	8,892	11,241	24,459	9,441

Tabella 5. Statistiche descrittive bandwidth utilizzati durante il rolling windows

Bandwidth					
Minimo	Primo quartile	Mediana	Terzo quartile	Massimo	Media
0,08	0,28	0,5095	1,1395	51,9910	1,7476

Un altro interessante aspetto è legato alla relazione tra $\hat{\vartheta}_t$, il parametro di copula stimato, e X_{t-1} , l'indice VIX del giorno precedente. Mediante ϑ_t si calcola il τ di Kendall utilizzando le seguenti formule rispettivamente per la copula di Gumbel, Clayton e Frank:

$$\tau(U_{1t}, U_{2t}) = \frac{\vartheta_t - 1}{\vartheta_t}$$

$$\tau(U_{1t}, U_{2t}) = \frac{\vartheta_t}{\vartheta_t + 2}$$

$$\tau(U_{1t}, U_{2t}) = 1 + \frac{4(D_1(\vartheta_t) - 1)}{\vartheta_t}$$

Dove con D_1 si indica la funzione di Debye di primo tipo definita nel modo seguente:

$$D_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{e^t - 1} dt$$

Si riporta nei seguenti grafici l'andamento di $\hat{\tau}(U_{1t}, U_{2t})$, calcolato mediante $\hat{\vartheta}_t$, in funzione di X_{t-1} dei vari modelli implementati.

Figura 8. $\tau(U_{1t}, U_{2t})$ in funzione di X_{t-1} nel modello con copula di Gumbel e white noise gaussiani

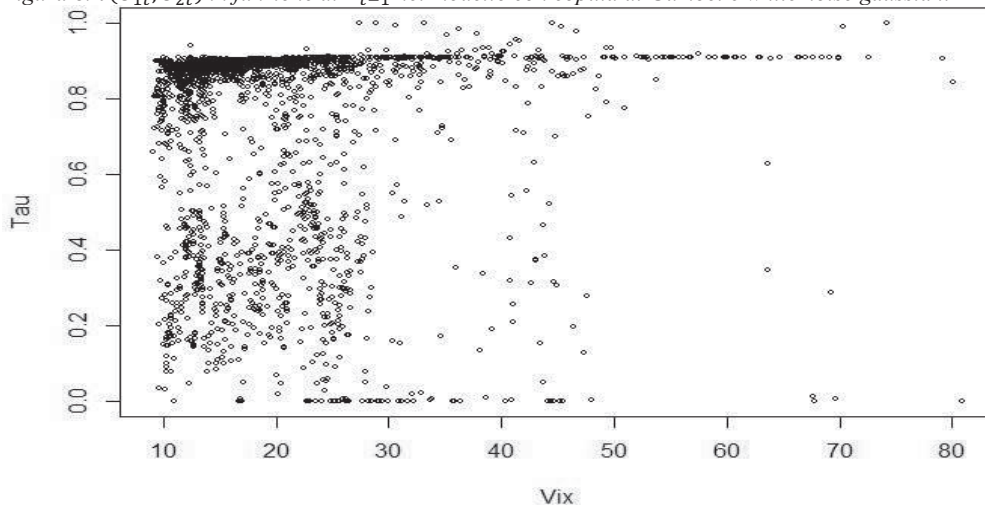


Figura 9. $\tau(U_{1t}, U_{2t})$ in funzione di X_{t-1} nel modello con copula di Gumbel e white noise t-Student

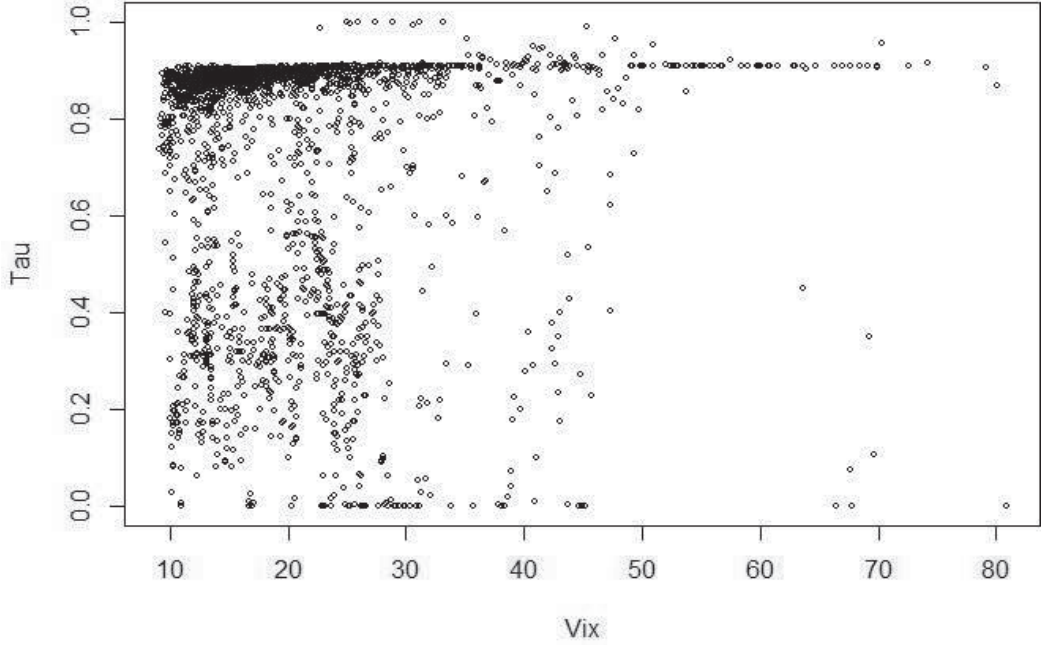


Figura 10. $\tau(U_{1t}, U_{2t})$ in funzione di X_{t-1} nel modello con copula di Clayton e white noise gaussiano

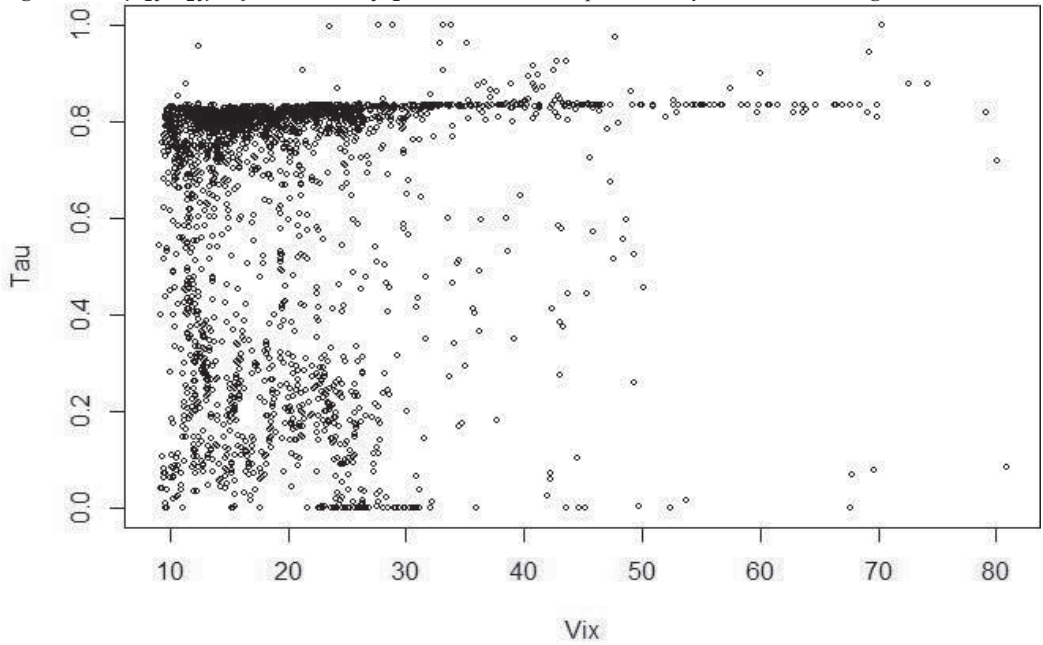


Figura 11. $\tau(U_{1t}, U_{2t})$ in funzione di X_{t-1} nel modello con copula di Clayton e white noise t -Student

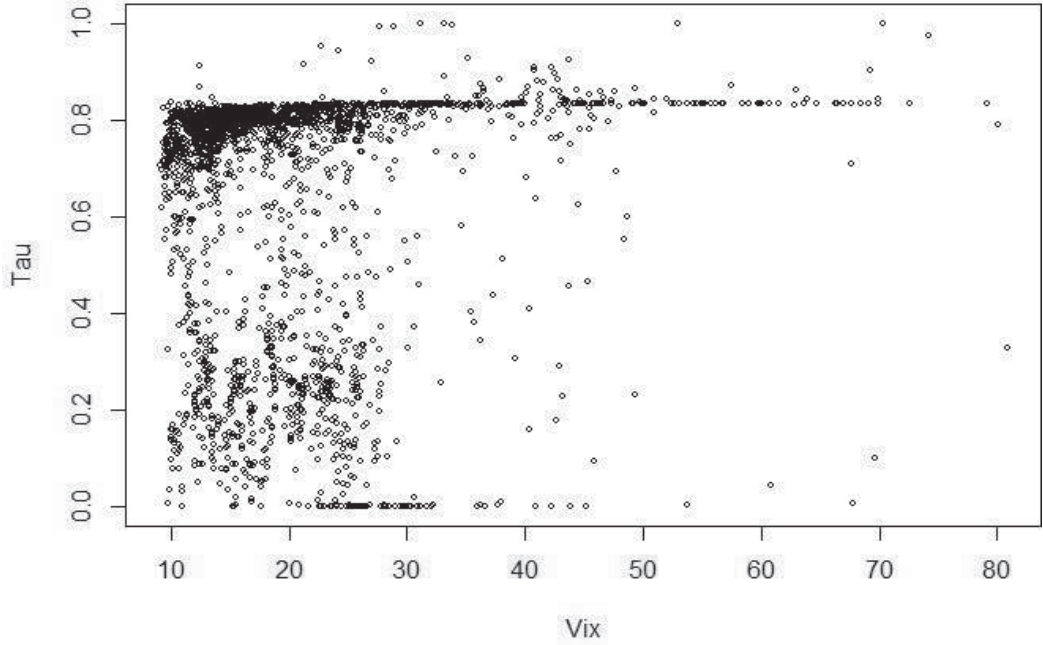


Figura 12. $\tau(U_{1t}, U_{2t})$ in funzione di X_{t-1} nel modello con copula di Frank e white noise gaussiano

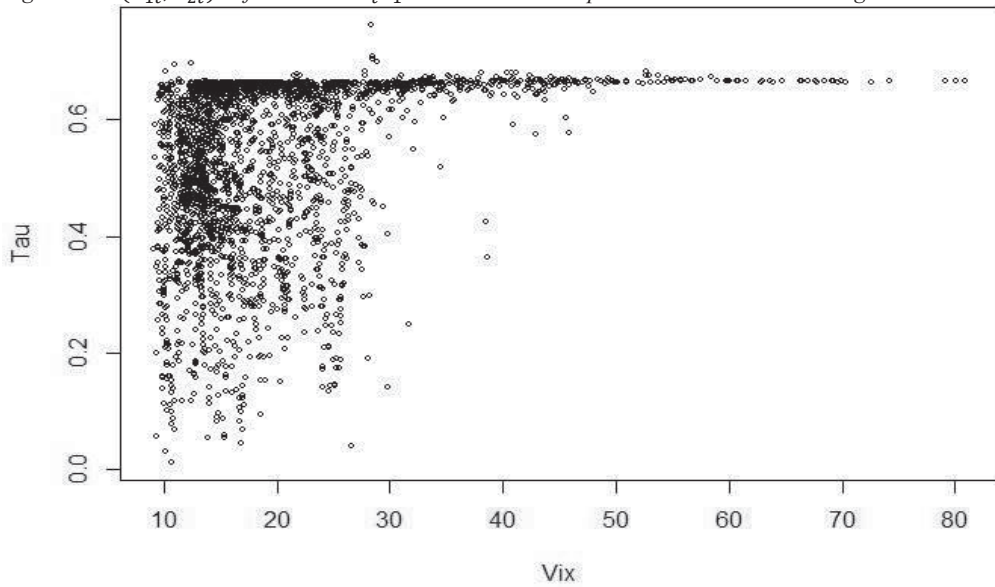
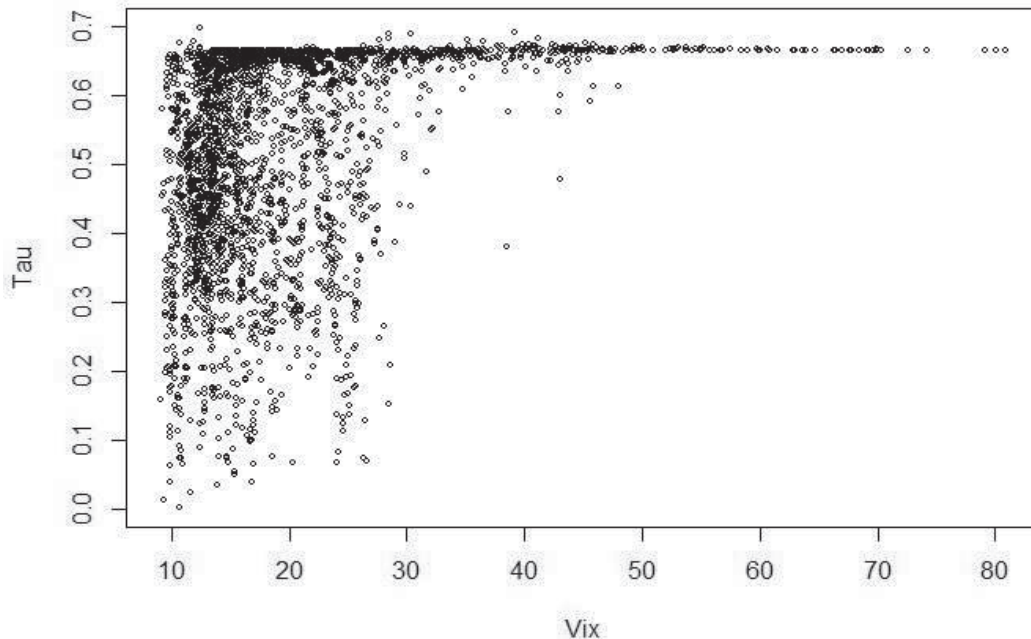


Figura 13. $\tau(U_{1t}, U_{2t})$ in funzione di X_{t-1} nel modello con copula di Frank e white noise t -Student



Infine, nella seguente tabella sono riportati il τ di Kendall, il ρ di Spearman ed il più classico coefficiente di correlazione lineare di Pearson tra $\hat{\vartheta}_t$ e X_{t-1} .

Tabella 6. Indici di dipendenza tra $\hat{\vartheta}_t$ e X_{t-1}

Distribuzione normale			
	τ -Kendall	ρ -Spearman	r -Pearson
Clayton	0,1302	0,1857	0,0154
Frank	0,286	0,4201	0,3725
Gumbel	0,1159	0,1508	0,0178
Distribuzione t -Student			
	τ -Kendall	ρ -Spearman	r -Pearson
Clayton	0,1404	0,1901	0,0644
Frank	0,3106	0,4507	0,3944
Gumbel	0,111	0,1404	0,0178

Si può notare che, per ogni copula e per ogni distribuzione marginale, essi risultano positivi, anche se nel caso della correlazione lineare per la copula di Clayton e Gumbel sono di poco sopra lo zero. Pertanto, l'intensità della dipendenza è in relazione positiva con il VIX ; questa conclusione è in linea con il fenomeno per cui la dipendenza tra i rendimenti aumenta con la volatilità, come mostrato in Longin et al., (2001); infatti il VIX come già detto è un indice di volatilità attesa dal mercato.

Infine, si riportano i valori dei p -value dei due test di Kupiec e Christoffersen per ogni modello, sia per i VaR al 95% che al 99%.

Tabella 7. Risultati test di Kupiec e Christoffersen VaR-95%

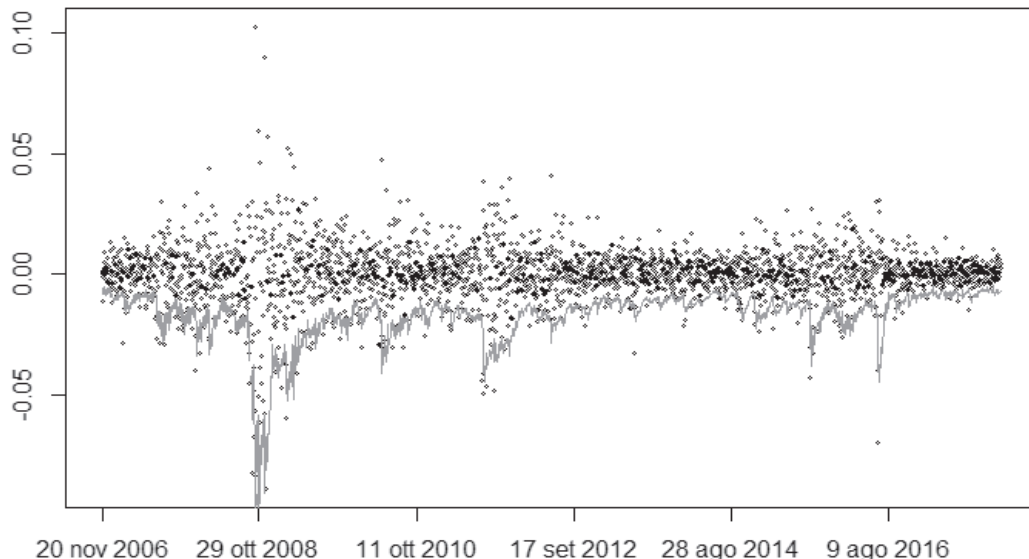
	Kupiec	Christoffersen
Clayton-N	0,266	0,529
Frank-N	0,00124	0,00151
Gumbel-N	0,344	0,567
Clayton-T	0,0632	0,158
Frank-T	(\cong)0	0,00151
Gumbel-T	0,107	0,226

Tabella 8. Risultati test di Kupiec e Christoffersen VaR-99%

	Kupiec	Christoffersen
Clayton-N	(\cong)0	0,00126
Frank-N	(\cong)0	(\cong)0
Gumbel-N	(\cong)0	(\cong)0
Clayton-T	0,179	0,0916
Frank-T	(\cong)0	0,00151
Gumbel-T	0,028	0,0304

Si nota che i modelli *Frank – N* e *Frank – T*, dove la copula è simmetrica, risultano inconsistenti alla luce dei test. Le altre due copule, invece, riescono a stimare sufficientemente bene i *VaR-95%*, avendo i *p-value* superiori al 5% in entrambi i test, ma solo il modello *Clayton – T* è idoneo a stimare quelli al 99%. Come già affermato, la dipendenza tra i rendimenti aumenta con la volatilità ma di solito su questa ultima c'è un effetto asimmetrico delle informazioni; quelle negative influiscono in misura maggiore, come mostrato in Ang et al., (2001); così periodi di alta volatilità è probabile che corrispondano a periodi di mercato al ribasso piuttosto che a momenti rialzisti. La copula di Clayton conferisce maggiore dipendenza tra le variabili proprio nella parte inferiore della distribuzione, mentre la distribuzione *t-Student* cattura la pesantezza delle code in maniera efficace tipica delle serie finanziarie e perciò non sorprende che tale modello risulti il migliore riuscendo a stimare anche i *VaR-99%*. A titolo esemplificativo si riporta il grafico della serie dei *VaR-95%* calcolati mediante il modello con copula di *Clayton* e white noise *t-Student* confrontati con i log-rendimenti realizzati dal portafoglio.

Figura 14. VaR-95% del modello Clayton – T e serie dei log-rendimenti



Di seguito è riportato l’AIC dei modelli che hanno superato i test di Kupiec e Christoffersen nel calcolo del VaR-95% ad un livello di confidenza di 0.05, per quelli al 99% non è necessario alcun confronto essendo risultato robusto solo un modello

Tabella 9. Calcolo dell’AIC

Modello	AIC/2
Clayton-N	25.222,7
Clayton-T	24.363,8
Gumbel-N	29.757,5
Gumbel-T	29.932,6

In questo caso è confermato quanto già visto nei test, cioè la copula di Clayton risulta quella che si adatta meglio ai dati.

4. Conclusioni

In questo lavoro si è voluto mostrare l’utilizzo delle copule condizionate nella stima del VaR. In generale tale metodo offre un utile strumento per la modellizzazione matematica della dipendenza tra variabili aleatorie e trova una sua naturale implementazione nella gestione del rischio, ma non è necessariamente limitato a tale aspetto. Nel presente lavoro abbiamo utilizzato copule condizionate in modo che la struttura di dipendenza non fosse necessariamente costante nel tempo; in particolare abbiamo proposto di farne variare l’intensità in funzione di una covariata e per tale funzione non abbiamo usato alcuna ipotesi restrittiva avendo utilizzato un approccio non parametrico.

Nella metodologia proposta si sono comunque assunte alcune semplificazioni, in particolare sulle distribuzioni marginali. Infatti, abbiamo utilizzato un semplice processo $GARCH(1,1)$ e non abbiamo tenuto conto di eventuali asimmetrie a livello marginale. Anche per la parte AR ci siamo limitati al caso con un solo lag e inoltre abbiamo fissato arbitrariamente il bandwidth della funzione kernel.

Nonostante questo, il modello proposto si è dimostrato solido. Infatti, in generale, abbiamo ottenuto buone stime del VaR -95% alla luce dei test. Invece, quelli al 99% sono stati in parte deludenti e più difficili da stimare, probabilmente rimuovendo le semplificazioni sulle marginali si potrebbero ottenere dei risultati migliori; in ogni caso almeno un modello, quello con la copula di Clayton e white noise di tipo t-Student, ha prodotto delle buone stime del VaR -99%, ed inoltre alla luce dell' AIC è risultato anche il modello migliore nello stimare quelli al 95%.

Le estensioni potrebbero essere molte, ad esempio si potrebbe aumentare il numero della dimensione del vettore aleatorio o quello della covariata. Infatti, si è utilizzato il VIX ma per completezza lo si potrebbe usare insieme al $FTSE$ 100 IVI , l'indice di volatilità del $FTSE$ 100². Inoltre, ci si è limitati a solo tre famiglie di copule ma in realtà la gamma di scelta è molto più ampia, in particolare volendo aumentare il numero della dimensione si potrebbe ricorrere alle copule ellittiche, in tal caso aumenterebbero il numero dei parametri da stimare e si avrebbe una maggiore flessibilità del modello ma, soprattutto utilizzando l'approccio di stima con il polinomio di Taylor, il problema potrebbe diventare a livello computazionale eccessivamente complesso.

Bibliografia

- ACAR E. F., CRAIU R. V., YAO F., (2011), Dependence calibration in conditional copulas: a non parametric approach, *Biometrics*, 67, 445-453.
- ANG A., CHEN J., (2001), Asymmetric correlations of equity portfolios, *Journal of Financial Economics*, 63, 443-494.
- BASZCZYŃSKA A., (2016), Kernel estimation of cumulative distribution function of a random variable with bounded support, *Statistics In Transition (new series)*, 17 (3), 541-556
- LONGIN F., SOLNIK B., (2001), Extreme value correlation of international equity markets, *The Journal of Finance*, 56, 649-676.
- MCNEIL A. J., FREY R., EMBRECHTS P., (2015). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools*, Princeton University Press, Princeton (USA).
- PALARO H. P., HOTTA L. K., (2006), Using conditional copula to estimate value-at-risk, *Journal of Data Science*, 4, 93-115.
- PATTON A.J., (2002), *Modelling time-varying exchange rate dependence using the conditional copula*, UCSD Discussion Paper No. 01-09.
- SKLAR A., (1959), *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris 8, 229-231

² Si potrebbe affermare che all'incirca il $FTSE$ 100 IVI è per il $FTSE$ 100 quello che è il VIX per il $S\&P$ 500 (e di conseguenza anche in parte dell' $S\&P$ 100).