SAPIENZA - UNIVERSITÀ DI ROMA

ANNALI DEL DIPARTIMENTO DI METODI E MODELLI PER L'ECONOMIA, IL TERRITORIO E LA FINANZA

2016

Perspectives on Behavioural Sciences

ISBN: 978-88-555-3361-4 ISSN: 2385-0825

PÀTRON EDITORE
Bologna 2016

PÀTRON Editore - Via Badini, 12
Quarto Inferiore, 40057 Granarolo dell'Emilia (BO)
Tel. 051.767003
Fax 051.768252
E-mail: info@patroneditore.com
http//www.patroneditore.com
Il catalogo generale è visibile nel sito web. Sono possibili ricerche per autore, titolo, materia e collana. Per ogni volume è presente il sommario, per le novità la copertina dell'opera e una breve descrizione del contenuto.

Stampa: Rabbi s.r.l., Bologna per conto di Pàtron editore, dicembre 2016.

Maria Giuseppina Bruno*
Antonio Grande*
Mario Marino*
Enrico Modica*

VALUTAZIONE E COPERTURA DEL RISCHIO MORTALITÀ

Riassunto: Nel presente lavoro, si analizza il modello MBMM (Mitchell et al., 2013) recentemente proposto in letteratura per la modellizzazione del rischio mortalità. Tale modello, rispetto al più noto ed applicato modello LC (Lee, Carter, 1992) e sue successive varianti, parte da ipotesi diverse riguardo la dinamica dei tassi di mortalità e raggiunge risultati migliori in termini di adattamento e previsione. Analiticamente, ciò si sostanzia nell'esprimere il logaritmo del fattore di variazione temporale del tasso centrale di mortalità per ogni età e tempo, piuttosto che il logaritmo del suo livello assoluto, come trasformazione lineare di un dato indice di mortalità temporale e nell'assumere per quest'ultimo una distribuzione Normal Inverse Gaussian (NIG) che, per spessore delle code e curtosi, ben si adatta all'evidenza empirica. Nel presente lavoro, si esaminano in dettaglio dette caratteristiche illustrando il procedimento logico-matematico di stima e proiezione alla base del modello e gli aspetti matematico-computazionali per una sua concreta applicazione in ambito attuariale.

Parole chiave: rischio mortalità, rischio longevità, processi di Lévy, Distribuzione Normal Inverse Gaussian (NIG), valutazione e copertura.

1. Introduzione

Fin dagli inizi del ventesimo secolo, l'evidenza empirica ha mostrato un significativo miglioramento dei tassi di mortalità dei principali Paesi sviluppati. Detto miglioramento si è sostanziato nella drastica riduzione dei tassi di mortalità a tutte le età ma con significative differenze in termini percentuali in funzione dell'età,

---

* Sapienza – Università di Roma, Roma, Italia.

del tempo e, in alcuni casi, dell'anno di nascita e un aumento della volatilità annua dei tassi di mortalità a livello aggregato (Cairns et al., 2008).

Dal punto di vista attuariale, ciò si è tradotto in sistematiche deviazioni dei tassi di mortalità attesa rispetto a quelli effettivamente osservati e in conseguenti forti divergenze tra impegni preventivati e impegni effettivamente sostenuti.

Si è reso pertanto necessario rivedere le basi tecniche demografiche tradizionalmente usate nei modelli di valutazione attuariale formulando ipotesi più verosimili circa la dinamica della mortalità.

Il rischio mortalità, inizialmente nato come rischio di modello, ha di conseguenza assunto la connotazione di rischio valutabile. Si tratta in altri termini della misura degli impegni derivanti dall'offerta di prodotti sulla durata di vita mediante i nuovi modelli previsionali.

Capire e quantificare l'evolversi della mortalità nel tempo è divenuto indispensabile anche ai fini della copertura dei suddetti impegni. Un problema che diventa ancor più variegato nel momento in cui, oltre a tipologie di copertura tradizionali quali il "natural hedging" di portafoglio e diverse forme riassicurative, si vogliano prendere in considerazione coperture alternative attraverso strumenti finanziari c.d. di "seconda generazione", quali i "mortality derivatives".

Il rischio mortalità è così divenuto oggetto di numerosi studi e discussioni anche soprattutto per il suo lato sistematico, il rischio longevità, tipicamente considerato nell'accezione aggregata.

Nel presente lavoro, tra i tanti modelli esistenti in letteratura, si fa specifico riferimento al modello LC (Lee, Carter, 1992), di fatto il più noto e ampiamente utilizzato nella pratica demografica ed attuariale.

Dopo un approfondito richiamo alle ipotesi e allo sviluppo del modello, si illustra l'alternativo modello MBMM (Mitchell et al., 2013) recentemente proposto in letteratura.

A differenza del modello LC e delle sue successive e molteplici varianti che descrivono il logaritmo del livello assoluto dei tassi centrali di mortalità come trasformazione lineare di un dato indice temporale di mortalità, il modello MBMM adotta un'analoga trasformazione per rappresentare il logaritmo dei fattori di variazione temporale degli stessi tassi.

Tale diversa prospettiva di rappresentazione della dinamica dei tassi di mortalità consente di cogliere con maggiore accuratezza la dipendenza tra le età e di rendere più esplicativo il modello. In tal modo, si conseguono risultati migliori in termini di adattamento e previsione.

Con riferimento all'aspetto previsionale, un ulteriore vantaggio del modello MBMM deriva dall'ipotesi di distribuzione Normal Inverse Gaussian (NIG) per l'indice di mortalità temporale. Per le sue caratteristiche, tale distribuzione ben si adatta all'evidenza empirica. Essa inoltre dipende da un ridotto numero di parametri e risulta pertanto facilmente calibrabile.

Tale tipo di distribuzione è stata finora poco impiegata in ambito demografico e attuariale. Per questo motivo nel presente lavoro, oltre agli aspetti di stima e proiezione dei modelli citati, particolare attenzione viene dedicata alla costruzione formale della distribuzione NIG e alla sua interpretazione probabilistica. Vengono inoltre commentati gli aspetti matematico-computazionali legati ad una sua concreta implementazione nell'ambito applicativo in esame.

Il lavoro è strutturato in particolare nel modo seguente: nel paragrafo 2, si illustra il noto modello LC ripercorrendone le fasi di stima e di proiezione; nel paragrafo 3, si illustra il modello MBMM rilevando analogie e differenze rispetto al modello precedente e analizzandone in dettaglio gli aspetti applicativi; infine, nel paragrafo 4, si riportano le conclusioni.

2. Il modello LC

Il modello LC è un modello di mortalità stocastico a tempo discreto. Esso si fonda sull'ipotesi che il tasso centrale di decesso $m_{x,t}$ per ogni classe di età x (con $x = 1,2, \dots , A$) in ogni anno di calendario t (con $t = 1, 2, \dots , T$) sia funzione del livello temporale della mortalità espresso dall'indice k_t secondo la seguente relazione log-bilineare:

$$\ln m_{x,t} = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \tag{1}$$

o in modo equivalente:

$$m_{x,t} = e^{a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}} \tag{2}$$

dove a_x e b_x sono parametri dipendenti dalla sola età x, mentre $\varepsilon_{x,t}$ è un termine di errore legato alla stima dei suddetti parametri, funzione delle età e del tempo. In particolare, a_x descrive la forma generica della curva di mortalità, mentre b_x misura la sensibilità di ciascuna età a variazioni del livello temporale di mortalità. Il termine di errore riassume invece le specifiche influenze storiche per ogni gruppo di età x, quindi le informazioni sulla mortalità della popolazione osservata che il modello non è in grado di catturare.

Gli errori $\varepsilon_{x,t}$ sono supposti indipendenti e identicamente distribuiti al variare di x e t, in particolare sono assunti normali con media 0 e scarto quadratico medio σ_x. Val la pena di osservare fin d'ora che la condizione di omoschedasticità temporale implicita in detta ipotesi non è però del tutto plausibile, corrispondendo ad assumere che una stessa età mantenga sempre la stessa rischiosità in termini di mortalità nel tempo.

Il modello LC così descritto viene applicato seguendo un primo step di stima dei parametri allo scopo di adeguarlo al set di tassi di mortalità osservati e un secondo step di proiezione della mortalità stimata. Nel primo caso, l'indice di mortalità è considerato deterministico mentre nel secondo caso esso è descritto mediante un processo stocastico.

2.1. La stima del modello

Inizialmente, si prende in considerazione un periodo storico nel quale osservare, con cadenza annuale, i tassi di decesso relativi ad una certa popolazione.

Si procede poi costruendo la matrice dei logaritmi dei tassi di decesso, avente tante righe quante sono le fasce di età considerate e tante colonne quanti sono gli anni di calendario. Definiamo tale matrice $M_{x,t}$, il cui generico elemento è $\ln m_{x,t} = \mu_{x,t}$ detto tasso di log-mortalità.

Relativamente ad a_x, b_x, k_t la parametrizzazione del modello non è unica, in quanto, per ogni scalare $c \in \mathbb{R}$, esso è invariante rispetto alle trasformazioni a_x, cb_x, $\frac{1}{c}k_t$ ($c \neq 0$) oppure $a_x - b_x c$, b_x, $k_t + c$. Ciò significa che a_x può essere determinato solo a meno di una costante additiva, b_x a meno di una costante moltiplicativa e k_t a meno di una combinazione lineare. Per ovviare a ciò e poter così stimare univocamente i parametri occorre porre delle restrizioni.

In particolare, gli autori ricorrono ai seguenti due vincoli:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} k_t = 0 & (3) \\ \sum_{x=1}^{A} b_x = 1 & (4) \end{cases}$$

La condizione (3) implica che la stima del parametro a_x sia data dalla media temporale del logaritmo dei tassi centrali di decesso per ogni gruppo di età x. In pratica, si ha:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mu_{x,t} \quad (5)$$

Si può quindi ricavare la matrice $\widehat{M}_{x,t} = M_{x,t} - \hat{a}_x$ (per la (5), chiamata matrice detrendizzata) avente come generico elemento $\hat{\mu}_{x,t} = \mu_{x,t} - \hat{a}_x$.

Per la (1) e l'ipotesi di distribuzione gaussiana a media nulla degli errori, si ha:

$$\mu_{x,t} - a_x = b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \sim N(b_x k_t, \sigma_x) \quad (6)$$

e ciò rende possibile applicare il metodo di massima verosimiglianza alla matrice detrendizzata $\widehat{M}_{x,t}$ per stimare i due parametri del prodotto $b_x k_t$. Per calcolare la soluzione ottima, gli autori applicano in particolare a detta matrice il metodo di decomposizione ai valori singolari (SVD, dall'acronimo inglese di Singular Value Decomposition) il che, numericamente, equivale ad operare l'analisi delle componenti principali della matrice di covarianza dei tassi di log-mortalità.

In alternativa, per la gaussianità a media nulla degli errori e per la condizione espressa dalla (4), l'indice k_t, per ogni t, può essere stimato mediante la somma degli elementi della t-esima colonna della matrice detrendizzata. Si può quindi scrivere:

$$\hat{k}_t = \sum_{x=1}^{A} \hat{\mu}_{x,t} \quad (7)$$

e, tenendo conto della (6), il parametro b_x può poi essere stimato per regressione lineare mediante la seguente:

$$\hat{\mu}_{x,t} = b_x \hat{k}_t \quad (8)$$

Calcolati i parametri, il numero di decessi stimato è dato da:

$$\widehat{D}_t = \sum_{x=1}^{A} N_{x,t} e^{\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t} \quad (9)$$

dove $N_{x,t}$ rappresenta la popolazione di età x esistente, in numerosità, nell'anno t.

Arrivati a questo punto il lavoro di stima non può però dirsi concluso. Gli autori affermano infatti che le stime $\hat{b}_x$ e $\hat{k}_t$ non garantiscono che il numero di decessi stimati mediante la (9) sia uguale o approssimativamente tale al numero di decessi osservati nel tempo, D_t. Ciò è anche dovuto al fatto che la (6) discende matematicamente dalla (1) e dall'ipotesi di gaussianità dell'errore ma non ne è accertata l'effettiva sussistenza nei dati.

Occorre pertanto procedere con quello che gli autori definiscono "second stage-estimation", ovverosia una procedura iterativa che, fissati $\hat{a}_x$ e $\hat{b}_x$ trovati nella prima fase, vada alla ricerca del valore di $\hat{k}_t$ che soddisfa la condizione $\hat{D}_t = D_t$.

Purtroppo, tale equazione non ammette necessariamente una soluzione unica e, in caso di più soluzioni o assenza di soluzione, il modello diventa inconsistente.

2.2. La proiezione dei futuri tassi centrali di mortalità

Per produrre le proiezioni della mortalità per la popolazione statunitense, Lee e Carter adottano un procedimento meramente estrapolativo ipotizzando che anche i futuri tassi centrali di mortalità soddisfino la (2).

Essi assumono in particolare che i futuri parametri a_x e b_x rimangano uguali a quelli stimati $\hat{a}_x$ e $\hat{b}_x$ e che l'unico parametro oggetto di previsioni, l'indice di mortalità futuro k_t, segua lo stesso processo stocastico descritto dai suoi valori stimati $\hat{k}_t$.

Attraverso un'analisi delle serie storiche degli indici di mortalità stimati, effettuata mediante la procedura di Box, Jenkins, gli autori osservano per essi un processo di tipo ARIMA (0,1,0). Di conseguenza assumono che l'evoluzione dell'indice di mortalità futuro segua una random walk con drift i cui parametri di drift e volatilità per unità di tempo vengono stimati sulla base dell'evoluzione passata con il metodo di massima verosimiglianza.

Si ha in particolare per ogni t:

$$k_t = k_{t-1} + d + e_t \tag{10}$$

dove d è il termine di drift e e_t è il termine di errore che riflette l'incertezza nella proiezione annua del livello di mortalità k_t, supposto normale con media 0 e scarto quadratico medio σ.

Pertanto il valore dell'indice di mortalità proiettato al tempo $T+h$ (con $h = 1,2,\ldots$) in base ai dati disponibili fino a T è dato da:

$$k_{T+h} = \hat{k}_T + hd + \sum_{j=1}^{h} e_{T+j} \tag{11}$$

che, nell'ipotesi di indipendenza e identica distribuzione degli errori diventa:

$$k_{T+h} = \hat{k}_T + hd + \sqrt{h}e_T \tag{12}$$

essendo $e_{T+h} = e_T \sim N(0, \sigma), \forall h$.

In base alla (2) e alla (12), si ottengono poi i futuri tassi di mortalità per ogni x e h:

$$m_{x,T+h} = \mathrm{e}^{\hat{a}_x + \hat{b}_x(\hat{k}_T + hd + \sqrt{h}e_T) + \epsilon_{x,T+h}} \tag{13}$$

Si noti che per ottenere i futuri tassi di mortalità, il modello trascina nel tempo un errore di proiezione al quale va aggiunto l'errore derivante dal fitting dei dati. Ciò è dovuto alla natura meramente estrapolativa delle proiezioni e rende difficile l'effettivo controllo dell'errore complessivo. Ulteriori problematiche del modello LC sono evidenziate in Cairns et al. (2008) e in Lee, Miller (2001).

Al modello LC sono seguite numerose generalizzazioni ed estensioni che però soffrono di analoghe problematiche. Si tratta di modelli multifattoriali che includono nelle previsioni ulteriori effetti osservati nel trend della mortalità, in particolare l'effetto di coorte e altri effetti di periodo. Ciò inserendo nuovi addendi, accompagnati da altrettanti parametri, nello sviluppo della (2) (Cairns et al., 2011; Haberman, Renshaw, 2011; Plat, 2009; Renshaw, Haberman, 2006; Yang et al., 2010) o adottando distribuzioni non gaussiane per il relativo termine di errore (Chen, Cox, 2009; Giacometti et al., 2009; Wang, Huang, Liu, 2011) a parità di ipotesi circa la dinamica dell'indice di mortalità temporale.

Completamente diversa è la logica su cui si fonda il modello illustrato nel paragrafo seguente.

3. Il modello MBMM

Mitchell et al. (2013) propongono un modello di mortalità stocastico che muove dall'originario modello LC apportandone due sostanziali modifiche, l'una in termini di stima e l'altra in termini di proiezione.

Entrambe derivano da una rilettura dei risultati del modello LC illustrati nel paragrafo precedente e possono essere applicate con facilità anche a tutte le sue estensioni multifattoriali.

3.1. La modifica al modello LC in termini di stima

La prima modifica apportata dal modello in esame al modello LC interviene in fase di impostazione iniziale.

In base alla (2) e alla (13) e posto $T+h = t$ e $h = 1$, si ha:

$$m_{x,t} = m_{x,t-1} e^{\hat{b}_x d + \hat{b}_x e_t + (\varepsilon_{x,t} - \varepsilon_{x,t-1})} \tag{14}$$

In pratica, secondo il modello LC, il tasso centrale di mortalità di un dato anno si ottiene da quello relativo all'anno precedente moltiplicandolo per un fattore esponenziale di variazione con esponente di forma analoga a quello della (2), avente in particolare il primo addendo dipendente dalla sola x, il secondo risultante dal prodotto di un fattore in x e di un fattore temporale, il terzo rappresentante un termine di errore dipendente dalle età e dal tempo.

Di qui l'idea del modello MBMM di utilizzare il secondo membro della (2) per modellizzare non più il tasso centrale di mortalità ma il suo fattore di variazione. In formule:

$$\frac{m_{x,t}}{m_{x,t-1}} = e^{a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}} \tag{15}$$

o in forma logaritmica:

$$\log m_{x,t} - \log m_{x,t-1} = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \tag{16}$$

Ciò comporta la possibilità di captare con maggiore precisione la struttura di dipendenza temporale presente tra le diverse età di decesso, consentendo un miglior adattamento ai dati storici, nonché una proiezione affetta da un errore inferiore.

La procedura di stima dei parametri del modello MBMM è del tutto analoga a quella del modello LC e identiche sono le condizioni (3) e (4) necessarie ai fini dell'unicità del risultato.

Naturalmente diverso è il significato dei parametri: b_x continua a misurare la sensibilità dei diversi gruppi di età alle variazioni della mortalità, ma a_x rappresenta la variazione media dei tassi di log-mortalità per ogni gruppo di età x e k_t non è più un indice del livello di mortalità ma costituisce un indice di variazione della mortalità nel tempo.

Diversa è anche la matrice delle osservazioni su cui eseguire l'in-sample fitting. Si tratta infatti della matrice avente come elementi le variazioni dei tassi di log-mortalità nel tempo, $\ln m_{x,t} - \ln m_{x,t-1}$. Essa è ottenuta dalla matrice dei tassi di log-mortalità $M_{x,t}$ utilizzata nel modello LC operando la differenza tra la sotto-matrice costituita dai tassi che vanno dal primo al penultimo anno e quella costituita dai tassi che vanno dal secondo all'ultimo anno.

Come mostrato dagli autori, il modello produce ottimi risultati in termini di fitting dei dati sia rispetto al modello LC che rispetto alla sue diverse varianti multifattoriali.

3.2. La modifica al modello LC in termini di proiezione

La seconda modifica apportata al modello LC dal modello in esame subentra in fase di previsione.

Come nel caso del modello LC, gli autori adottano un procedimento estrapolativo e ipotizzano che i futuri tassi centrali di mortalità continuino a soddisfare la (15). La modifica consiste nell'ipotizzare che, al variare di t, k_t siano variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite aventi distribuzione di tipo NIG, con parametri costanti opportunamente stimati in base alle osservazioni passate.

La scelta di tale tipo di distribuzione deriva dalla sua capacità di incorporare le caratteristiche di asimmetria, spessore delle code ed elevata curtosi osservate nella serie storica dell'indice di mortalità. L'ipotesi di indipendenza, identica distribuzione e costanza dei parametri nel tempo discende invece dall'osservare che il termine k_t della (15) svolge lo stesso ruolo di e_t nella (14) ed è quindi ragionevole assumere per esso le medesime ipotesi fatte per quest'ultimo.

Una variabile aleatoria Y si dice avere distribuzione NIG con parametri $\alpha, \beta, \mu, \delta,$ e si scrive $Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$, se è dotata della seguente funzione di densità (appartenente alla classe più generale di funzioni iperboliche generalizzate):

$$f_Y(y;\alpha,\beta,\mu,\delta) = \frac{\alpha}{\pi} exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(y-\mu)\right)\frac{K_1\left(\alpha\delta\sqrt{1+\left(\frac{y-\mu}{\delta}\right)^2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y-\mu}{\delta}\right)^2}} \tag{17}$$

dove $\alpha > 0$ è il parametro indicante lo spessore delle code, $\beta < |\alpha|$ è il parametro di asimmetria, $\mu \in \mathbb{R}$ è il parametro di posizione, $\delta > 0$ è il parametro di scala e $K_1(\cdot)$ è la funzione di Bessel modificata del terzo tipo di ordine 1.

La variabile aleatoria Y così distribuita descrive il valore assunto da un moto browniano uscente da μ per $t = 0$, con drift β e volatilità unitaria per unità di tempo, ad un tempo aleatorio avente distribuzione Inverse Gaussian (IG) di parametri δ, γ, posto $\alpha = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}$.

Una variabile aleatoria T si dice avere distribuzione IG con parametri δ, γ, e si scrive $Y \sim IG(\delta, \gamma)$, se ha la seguente funzione di densità:

$$f_T(s;\delta,\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\delta e^{\delta s}}{s^{3/2}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{s}+\gamma^2 s\right)\right) \tag{18}$$

La variabile aleatoria T così distribuita rappresenta il tempo di primo passaggio per il valore δ di un secondo moto browniano, indipendente dal precedente, uscente da 0, con drift γ e volatilità unitaria per unità di tempo.

In pratica, si può scrivere:

$$\begin{cases} Y = \mu + \beta T + \sqrt{T}N_1 \\ T = \min s: \gamma s + \sqrt{s}N_2 = \delta \end{cases} \tag{19}$$

con N_1 e N_2 normali standardizzate indipendenti.

In base a quanto detto, l'ipotesi previsionale del modello MBMM consiste nel porre $k_t = Y,\ \forall t$. Ai fini degli sviluppi successivi, tale ipotesi consente di sfruttare due importanti proprietà della distribuzione NIG, la proprietà di convoluzione e la proprietà di scala.

Per la proprietà di convoluzione, date $Y_1 \sim NIG(\alpha,\beta,\mu_1,\delta_1)$ e $Y_2 \sim NIG(\alpha,\beta,\mu_2,\delta_2)$ indipendenti, si ha:

$$Y_1 + Y_2 \sim NIG(\alpha,\beta,\mu_1+\mu_2,\delta_1+\delta_2) \tag{20}$$

Per la proprietà di scala, data $Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ e una costante c, si ha:

$$cY \sim NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, c\mu, c\delta\right) \tag{21}$$

Secondo la (15), per ogni x e h (con h = *1,2,…*), si può scrivere:

$$m_{x,T+h} = m_{x,T} e^{h\hat{a}_x + \hat{b}_x \sum_{j=1}^{h} k_{T+j} + \sum_{j=1}^{h} \epsilon_{T+j}} \tag{22}$$

da cui, per le ipotesi del modello, si ha:

$$m_{x,T+h} = m_{x,T} e^{h\hat{a}_x + \hat{k}_h + \sqrt{h}\epsilon_T} \tag{23}$$

dove per le proprietà di convoluzione e di scala:

$$\hat{k}_h = \hat{b}_x \sum_{j=1}^{h} k_{T+j} \sim NIG\left(\frac{\alpha}{\hat{b}_x}, \frac{\beta}{\hat{b}_x}, \hat{b}_x h\mu, \hat{b}_x h\delta\right) \tag{24}$$

La (23) fornisce la previsione dei futuri tassi centrali di mortalità secondo il modello in esame.

Dal punto di vista applicativo, tale previsione può essere ulteriormente semplificata. Infatti, il limitato numero di parametri della NIG rende il modello facilmente calibrabile. Ciò riduce l'errore e consente di trascurare in fase previsionale il termine ϵ_T.

Oltre alla stima dei parametri, l'implementazione del modello richiede l'applicazione del metodo Montecarlo per generare la successione degli indici $\hat{k}_h$ dati dalla (24). In base alla (19), per ogni h, occorre procedere nel modo seguente ad ogni replicazione:

- generare un numero t estratto da una distribuzione IG di parametri $\hat{b}_x h\delta, \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\hat{b}_x}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\hat{b}_x}\right)^2}$;
- estrarre un numero n da una normale standardizzata;
- calcolare il numero $y = \hat{b}_x h\mu + \frac{\beta}{\hat{b}_x} t + \sqrt{t}n$.

Dal punto di vista computazionale, nulla cambierebbe nel caso di modelli multifattoriali nell'ipotesi di indici temporali aventi distribuzioni NIG indipendenti. L'unica complicazione deriverebbe dall'appesantimento del calcolo dovuto al fatto di dover generare più numeri da NIG diverse ad ogni replicazione.

4. Conclusioni

Nel lavoro, si analizza il modello MBMM recentemente proposto in letteratura per descrivere la dinamica della mortalità.

Attraverso il confronto con il più noto modello LC, si illustra la logica sottostante le ipotesi di stima e proiezione che consentono la costruzione di tavole di mortalità sempre più aderenti all'evidenza empirica, primo passo verso una migliore valutazione e gestione del rischio mortalità in ambito attuariale.

In particolare, si mostra come, modellando la variazione dei tassi di log-mortalità piuttosto che il loro livello assoluto, gli autori del modello riescano a captare con maggiore precisione la struttura di dipendenza temporale osservata tra le diverse età di decesso migliorando adattamento ai dati e previsione.

Nel lavoro si illustrano inoltre le proprietà matematiche e gli aspetti computazionali legati all'applicazione della distribuzione NIG adottata dagli autori del modello per rappresentare l'indice temporale di mortalità. Si tratta di una distribuzione che, per spessore delle code e curtosi, ben si adatta all'evidenza empirica e che, per il ridotto numero di parametri, risulta facilmente calibrabile, consentendo in tal modo l'ulteriore riduzione dell'errore di previsione.

Intento futuro degli autori è quello di impiegare la base tecnica demografica risultante dal modello per la valutazione di prodotti assicurativi legati alla durata di vita e per l'implementazione di opportune strategie di hedging "dinamico" degli impegni da essi derivanti.

Riferimenti bibliografici

BARNDORFF-NIELSEN O.E. (1997), Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling, *Scandinavian Journal of Statistics* **24**, 1-13.

BARNDORFF-NIELSEN O.E. (1998), Processes of normal inverse gaussian type, *Finance and* Stochastics **2**, 41-68.

BROUHNS N., DENUIT M., VERMUT J.K. (2002), A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life tables, *Insurance: Mathematics and Economics* **31**, 373-393.

CAIRNS A.J.G., BLAKE D., DOWD K. (2006a), Pricing death: frameworks

for the valuation an securitization of mortality risk, *Astin Bulletin* **36**, 79-120.
CAIRNS A.J.G., BLAKE D., DOWD K. (2006b), A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration, *Journal of Risk and Insurance* **73**, 687-718.
CAIRNS A.J.G., BLAKE D., DOWD K. (2008), Modelling and management of mortality risk: a review, *Scandinavian Actuarial Journal* **2008**, 2-3, 79-113.
CAIRNS A.J.G., BLAKE D., DOWD K., COUGHLAN G.D., EPSTEIN D., KHALAF-ALLAH M. (2011), Mortality density forecasts: an analysis of six stochastic mortality models, *Insurance: Mathematics and Economics* **48**, 355-367.
CHEN H., COX S. (2009), Modeling mortality with jumps: applications to mortality securitization, *The Journal of Risk and Insurance* **76**, 3, 727-751.
CHHIKARA R.S., FOLKS J.L. (1989), *The inverse Gaussian distribution. Theory, methodology, and applications*, Marcel Dekker Inc., New York.
CHRISTIANSEN M.C., SPODAREV E., UNSELD V. (2015), Differences in European mortality rates: a geometric approach on the age-period plane, *ASTIN Bulletin* **45**, 3, 477-502.
GIACOMETTI R., ORTOBELLI S., BERTOCCHI M.I. (2009), Impact of different distributional assumptions in forecasting Italian mortality rates, *Investment Management and Financial Innovations* **6**, 3, 186-193.
HABERMAN S., RENSHAW A. (2011), A comparative study of parametric mortality projection models, *Insurance: Mathematics and Economics* **48**, 35-55.
HUNT A., BLAKE D. (2014), A general procedure for constructing mortality models, *North American Actuarial Journal* **18**, 1, 116-138.
JOLLIFFE I. (2002), *Principal component analysis,* Springer, New York.
LEE R.D. (2000), The Lee-Carter Method for forecasting mortality, with various extensions and applications, *North American Actuarial Journal* **4**, 80-93.
LEE R.D., CARTER L.R. (1992), Modeling and forecasting US mortality, *Journal of the American Statistical Association* **87**, 419, 659-671.
LEE R.D., MILLER T. (2001), Evaluating the performance of the Lee-Carter model for forecasting mortality, *Demography* **38**, 537-549.
MITCHELL D., BROCKETT P., MENDOZA-ARRIAGA R., MUTHURAMAN K. (2013), Modeling and forecasting mortality rates, *Insurance: Mathematics and Economics* **52**, 275-285.
PLAT R. (2009), On stochastic mortality modelling, *Insurance: Mathematics and Economics* **45**, 393-404.
RENSHAW A.E., HABERMAN S. (2006), A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors, *Insurance: Mathematics and Economics* **38**, 556-570.

WANG C., HUANG H., LIU I. (2011), A quantitative comparison of the Lee-Carter model under different types of non-Gaussian innovation, *The Geneva Papers* **36**, 675-696.

YANG S., YUE J., HUANG H. (2010), Modeling longevity risks using a principal component approach: a comparison with existing stochastic mortality models, *Insurance: Mathematics and Economics* **46**, 254-270.

Summary: In this paper, we study the MBMM model (Mitchell et al., 2013), recently proposed in the literature for modeling the mortality risk. Compared to the best known and most widely used model LC (Lee, Carter, 1992) and its subsequent variants, this model starts from different assumptions about the dynamics of the mortality rates and it achieves better results in terms of fitting and forecasting. The authors of the model express the logarithm of the time variation factor of the central death rate for every age and time, rather than the logarithm of its absolute level, as a linear transformation of a given temporal mortality index and they assume for the latter a Normal Inverse Gaussian distribution (NIG) which, in thickness of the tails and kurtosis, well fits the empirical evidence. In this paper, we examine in detail the above-mentioned characteristics. We illustrate the logical-mathematical procedure of fitting and forecasting underlying the model and we also show the mathematical and computational aspects for its application.