

## APPLICAZIONE DI MODELLI MATEMATICI ANALITICI E NUMERICI PER LO STUDIO DELLE PERTURBAZIONI GEOTERMICHE CAUSATE DA VARIAZIONI AMBIENTALI DI TEMPERATURA DURANTE L'OLOCENE

### ANALYTICAL AND NUMERICAL MATHEMATICAL MODELS FOR THE STUDY OF GEOTHERMAL VARIATIONS CAUSED BY ENVIRONMENTAL TEMPERATURE VARIABILITY DURING HOLOCENE

ANTONIO PASCULLI(\*), NICOLA SCIARRA(\*), PATRIZIO SIGNANINI(\*) & PATRIZIO TORRESE(\*)

(\*) Università degli Studi di Chieti-Pescara, Dipartimento di Geotecnologie per l'Ambiente ed il Territorio

#### RIASSUNTO

Molti fenomeni geologici potrebbero essere legati alla presenza di anomalie locali del gradiente termico del sottosuolo. La presenza di livelli di permafrost, di fenomeni carsici a sviluppo orizzontale, di depositi travertinosi in formazioni calcaree formati in particolari periodi geologici, potrebbero essere solo alcune delle fenomenologie connesse con questo tipo di processo. Una delle cause delle anomalie può essere attribuita alle variazioni paleoclimatiche delle temperature. Diversi modelli numerici proposti (tra i quali per esempio BODRI *et alii*, 2001; DAHL-JENSEN *et alii*, 1998; PASCULLI & SCIARRA, 2005; POLLACK & HUANG, 2000), dimostrerebbero la plausibilità di inversioni del gradiente geotermico locale dovute alle variazioni di temperatura ambientale. La finalità di questo lavoro è stata quella di discutere dal punto di vista matematico la plausibilità delle inversioni e le sue peculiarità nello spazio e nel tempo, non solo mediante l'elaborazione e la soluzione di un modello numerico agli elementi finiti ma anche mediante un modello matematico-analitico, applicato a sistemi geologici necessariamente semplificati, in aree caratterizzate da bassi valori del gradiente, nelle quali sia possibile escludere la formazione di permafrost anche in epoche passate. D'altronde, il permafrost è un sistema con notevole "inerzia termica" che, di conseguenza, provoca un ritardo ed un'attenuazione nella "risposta" del sistema stesso alle variazioni esterne di temperatura. Ciò implica che le oscillazioni termiche sulla superficie terrestre non possano essere facilmente trasmesse a strati al di sotto di eventuali livelli di permafrost di grosso spessore. Pertanto, l'innescarsi di cambiamenti di stato favorirebbe l'inversione dello stesso gradiente geotermico. L'esclusione della modellazione del permafrost, oltre a semplificare l'elaborazione del calcolo analitico, consente lo studio e la plausibilità di inversioni anche in aree più calde e, quindi, meno predisposte da questo punto di vista.

Inoltre, si ritiene opportuno osservare che, come è noto, un approccio analitico, quando possibile, consente comunque di ottenere delle indicazioni ed informazioni più generali di quelle che si possono ricavare da risultati prettamente numerici e, quindi, specifici del particolare insieme di valori attribuiti ai parametri caratterizzanti il problema in esame.

I modelli implementati e discussi, considerano la distribuzione delle temperature in una piastra semi-infinita di sottosuolo. È stata

#### ABSTRACT

A large number of geological phenomena may be linked to anomalies of the local underground thermal gradient. The appearance of permafrost levels, the karstification with a predominant horizontal growth and travertine deposition in limestones at specific geological times may be just a few consequences of geothermal anomalies. One of the causes of the anomalies can be attributed to the past variations of the temperatures. Various proposed numerical models (for example DAHL-JENSEN *et alii*, 1998; PASCULLI & SCIARRA, 2005), would demonstrate the feasibility of the occurrence of local geothermal gradient inversion due to the environmental temperature variations. Thus the target of this paper was essentially to discuss, furthermore, the mathematical feasibility of inversion and its peculiarity in space and in time, not only by means of the elaboration and the solution of a finite element numerical model, but by means of an analytical mathematical model as well. This was applied to simplified geological systems, in areas characterized by low gradient values, in which it is possible to exclude the formation of permafrost also in the past. The permafrost is a system with remarkable "thermal inertia" which, consequently, causes a delay and a lowering of the "answer" to the external temperature variations. This characteristic implies that surface thermal oscillations cannot be strictly correlated with temperature profile below thick permafrost layer. As a consequence the reversals of the geothermal gradient occurrence would have been enhanced. Moreover the exclusion of the permafrost, beyond simplifying the elaboration of the analytical calculation, allows the study of the feasibility of reversals also in warmer areas and, therefore, less prone from this point of view.

Furthermore, it is noteworthy to point out that, as it's well known, an analytical approach, if possible, allows to obtain indications and informations more general than those that can be obtained from typically numerical results. Indeed, numerical ones are specific of the particular ensemble of values assigned to the parameters characterizing the problem.

The implemented and discussed models consider temperature distribution in a semi-infinite soil slab. We took into account the

presa in considerazione la variazione di temperatura sulla superficie terrestre, essenzialmente negli ultimi 90.000 anni, ricavata dallo studio dei due isotopi dell'ossigeno ( $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ ) misurati nelle carote estratte dai ghiacciai della Groenlandia nel progetto GRIP (Greenland Ice-core Project). Applicando la F.F.T. (Fast Fourier Transform) sulle curve sperimentali del rapporto isotopico, è stata costruita un'equivalente e correlata curva analitica di temperatura, utilizzata quale condizione al contorno di tipo "Dirichlet". Nel modello analitico, le "onde termiche" così risultanti, sono state implementate in un modello matematico a "scansione temporale", allo scopo di ottenere l'evoluzione dell'oscillazione della distribuzione della temperatura all'interno del sottosuolo, escludendo la formazione di permafrost. Anche queste simulazioni evidenziano la possibilità che si siano verificate inversioni locali del gradiente termico, dovute alle variazioni di temperatura ambientale, ad una profondità che va da alcune decine fino ad alcune centinaia di metri, in differenti periodi geologici, anche in regioni relativamente calde e caratterizzate da bassi se non nulli valori del preesistente gradiente geotermico.

Con il modello numerico agli elementi finiti, sviluppato da PASCULLI & SCIARRA (2005) a partire da KÖRNER (1990) (vedi appendice all'articolo), è stata infine inclusa anche l'eventuale formazione di permafrost, con la relativa "inerzia termica". Anche in questo caso si sono evidenziate inversioni geotermiche.

**PAROLE CHIAVE:** anomalie geotermiche, oscillazioni di temperatura, modello matematico-analitico, modello numerico agli elementi finiti

## INTRODUZIONE

Lo scopo del presente lavoro è stato quello di verificare mediante un modello matematico analitico e matematico numerico la possibilità che durante l'Olocene si siano verificate inversioni del gradiente geotermico. L'acqua degli oceani è costituita nella maggior parte da due isotopi:  $^{16}\text{O}$  e  $^{18}\text{O}$  (0.2% circa). Durante il processo di evaporazione, la fase liquida si arricchisce preferenzialmente dell'isotopo pesante  $^{18}\text{O}$ , il contrario, invece, nella fase vapore. Viceversa, l'isotopo  $^{18}\text{O}$  tende a condensarsi prevalentemente dal vapore. L'evaporazione e la condensazione sono processi dipendenti dalla temperatura. Dato che la temperatura degli oceani è molto più stabile di quella dell'aria, quest'ultima presenta una rilevante influenza sulla composizione isotopica delle precipitazioni. Quindi, nelle carote estratte da ghiacci, i livelli depositi in inverno, isotopicamente più "leggeri", possono essere distinti da quelli più "pesanti" estivi. È stata utilizzata un'approssimazione sufficientemente accurata delle misure sperimentali ottenute nell'ambito del progetto GRIP (JOHNSEN *et alii*, 2001), che mostra i valori di  $\delta^{18}\text{O}$  (‰) (la deviazione relativa al rapporto  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$  nel campione, rispetto a quello della media considerata standard dell'acqua di mare) negli ultimi 90.000 anni.

Questa curva è stata scelta in quanto ricavata da misure effettuate sui ghiacciai della Groenlandia, essendo questa un'area geologicamente stabile. Prendendo in considerazione questi ghiacciai prossimi

earth surface temperature variation throughout the last 90,000 years, deduced from the rate of two oxygen isotopes ( $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ ) measured in Greenland glaciers by GRIP (Greenland Ice-core Project) group. From the experimental oxygen isotopes ratio curve, applying the FFT (Fast Fourier Transform) tool, we built up an equivalent and correlated temperature analytical curve, implemented as Dirichlet's boundary condition. The resulting well known analytical "thermal waves" have been implemented in a mathematical time scanning model, in order to obtain the evolution of oscillation of the subsoil temperature distribution excluding, however, permafrost formation. Also this kind of simulation shows an actual feasibility of a local thermal gradient inversion due to environmental temperature variability, at a depth ranging from few dozens up to a few hundred meters, at different geological periods. This can be happened also in relatively warm regions and characterized by vanishing or null values of the pre-existing geothermal gradient.

The finite element numerical model, briefly reported in this paper, take into account the eventual formation of permafrost, with its "thermal inertia". Also in this case, geothermal reversals have been evidenced.

**KEYWORDS:** geothermic anomalies, temperature oscillations, analytic mathematic model, numerical finite element model

## INTRODUCTION

The aim of this paper was essentially to discuss the mathematical feasibility of geothermal gradient inversions during Holocene and the related peculiarities in the space and in the time, by means of both analytical and numerical methods.

The ocean water is mostly made up of two kind of isotopes:  $^{16}\text{O}$  and  $^{18}\text{O}$  (about 0.2%). During evaporation, the heavier isotope  $^{18}\text{O}$  is preferentially enriched in the liquid phase and depleted in the vapor phase. Viceversa,  $^{18}\text{O}$  condenses preferentially from the steam. Evaporation and condensation depend on the temperature. Since ocean temperatures are far more stable than air temperatures, the latter have a strong bearing on the isotopic composition of the precipitation. Thus in ice cores, layers deposited during winter, characterized by light isotopes, can be distinguished from heavier isotopes in layers deposited during summer. So we employed an enough accurate approximation of a GRIP's experimental measures (JOHNSEN *et alii*, 2001), which shows  $\delta^{18}\text{O}$  (‰) (the relative deviation of the  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$  ratio in a sample, from that in standard mean ocean water), through the last 90,000 years.

This curve resulted from measurements taken from Greenland's glaciers in a geological stable area and refer to a long temporal sequence of the oxygen isotopic ratio, less influenced by the distance from the evaporation zone.

all'oceano è stato possibile ottenere una lunga sequenza temporale del rapporto isotopico dell'ossigeno, poco influenzato dalla distanza dalla zona di evaporazione.

Applicando il metodo della F.F.T. (Fast Fourier Transform) alle curve sperimentali del rapporto isotopico, è stata costruita un'equivalente e correlata curva analitica di temperatura, somma di nove armoniche, utilizzata quale condizione analitica al contorno di tipo "Dirichlet", per la soluzione dell'equazione della conduzione mono dimensionale attraverso una piastra semi infinita.

Le "onde termiche" risultanti, sono state implementate in un modello matematico a "scansione temporale", allo scopo di ottenere e visualizzare, anche mediante una rappresentazione cromatica delle stesse, l'evoluzione delle oscillazioni della distribuzione della temperatura all'interno del sottosuolo.

L'interattività con il modello di calcolo sviluppato, consente inoltre di scegliere la scansione temporale, la massima profondità e la diffusività termica del suolo.

Alcuni degli autori (PASCULLI & SCIARRA, 2005), inoltre, hanno sviluppato, a riguardo, un modello numerico agli elementi finiti, non lineare. L'algoritmo proposto, testato a fronte di soluzioni analitiche già note od elaborate ad hoc, ha evidenziato in modo incontrovertibile la plausibilità fisica delle inversioni del gradiente termico, sia in regioni fredde (con formazione del permafrost), sia in regioni calde. Il modello numerico sviluppato consente di includere nella fenomenologia di scambio termico, la presenza o meno di acqua, i cambiamenti di stato, la stratificazione litologica.

### DESCRIZIONE DEL MODELLO ANALITICO

La Fig.1 mostra la curva sperimentale di Johnsen alla quale è stato quindi applicato lo sviluppo in serie di Fourier e la F.F.T. (Fast Fourier Transform) in modo da utilizzare il metodo analitico di Fourier della propagazione delle "onde termiche" attraverso le rocce (LUIKOV, 1980; KÖRNER, 1990).

In prima approssimazione e, quindi, coerentemente con la finalità di questo lavoro, abbiamo assunto una correlazione diretta tra

Applying F.F.T. (Fast Fourier Transform) to the isotopic ratio curves, an equivalent and correlated temperature curve has been constructed, as sum of nine harmonics. Then it was used as analytical boundary condition of "Dirichlet" type, for the solution of the equation of the 1D heat conduction through a semi-infinite plate.

The resulting "thermal waves", have been implemented in a "temporal scanning" mathematical model, in order to obtain and visualize, through a chromatic display, the subsoil oscillations evolution of the temperature distribution.

The interactivity feature of the developed model, allows to choose the temporal scanning, the maximum depth and the ground thermal diffusivity.

Some of authors (PASCULLI & SCIARRA, 2005) have developed a non-linear finite element numerical model. The proposed algorithm, tested in view of already known analytical solutions or "ad hoc" elaborated ones, evidenced in an incontrovertible way, the physical feasibility of the thermal gradient reversals. That is possible both in cold regions (with formation of the permafrost) and in warm ones. The developed numerical model allows to include in the thermal exchange process, the presence of water, the changes of state, the lithological stratification.

### ANALYTIC MODEL DESCRIPTION

Fig. 1 shows the Johnsen's experimental curve to which the F.F.T. (Fast Fourier Transform) has been applied in order to use the Fourier analytical method of the "thermal waves" propagation through the rocks (LUIKOV, 1980; KÖRNER, 1990).

In first approximation and coherently with the aim of this paper, we have assumed a direct correlation between  $\delta^{18}O$  (‰) and the earth surface temperature. The consequence was to suppose an analogous

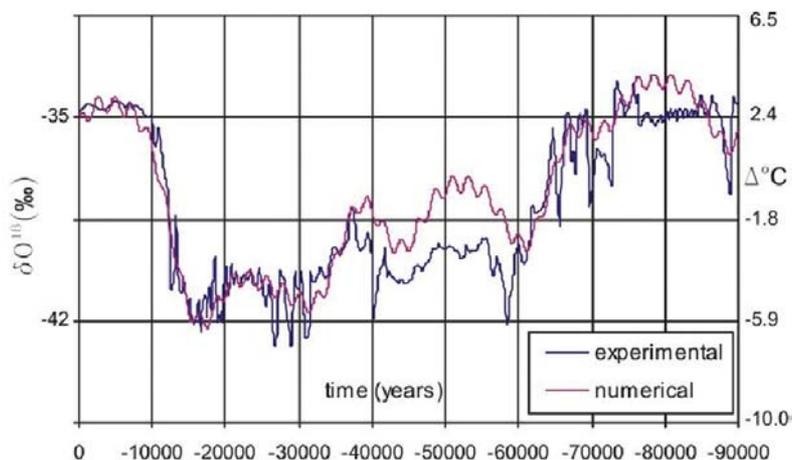


Fig. 1 - Confronto tra i rapporti isotopici dell'ossigeno sperimentali e numerici, ottenuti dalla F.F.T.  
- Comparison between experimental and numerical oxygen isotopes ratio, obtained by F.F.T. method

$\delta^{18}\text{O}$  (‰) e la temperatura della superficie terrestre. Di conseguenza è stata assunta una curva analoga per la variazione di temperatura (“numerica” in fig. 1). Questa assunzione trova supporto nella letteratura esistente, ad esempio in JOHNSEN *et alii* (1992) e in GRIP (1993); per la Groenlandia, è generalmente accettato un rapporto concentrazione isotopica - variazione di temperatura di  $\alpha_T=1.5^\circ\text{C}$  per un cambiamento di 1‰ di  $\delta^{18}\text{O}$ . Naturalmente ogni territorio ha subito un’influenza specifica del cambiamento climatico sulla temperatura. Per il nostro modello, si è assunto un gradiente più conservativo pari a  $\alpha_T=1.2^\circ\text{C}$  per un cambiamento di 1‰ di  $\delta^{18}\text{O}$ . Da quanto detto segue che il significato delle curve “numeriche” riportate in fig. 1 è quello di una sovrapposizione delle armoniche termiche oscillanti attorno ad una temperatura superficiale media  $\bar{\theta}_{\text{surf}}$  corrispondente al punto zero della F.F.T.. Pertanto i valori di temperatura ottenuti in questo lavoro attraverso un approccio basato sulle onde termiche, hanno il significato di oscillazioni di temperatura intorno a  $\bar{\theta}_{\text{surf}}$ . Date le finalità dello studio, riguardanti solo le perturbazioni termiche, non è stato necessario determinare il valore numerico di  $\bar{\theta}_{\text{surf}}$  che, comunque, è stato assunto sufficientemente alto in modo da escludere la formazione del permafrost.

Sono state individuate, tra le altre, nove armoniche significative la cui somma approssima sufficientemente bene la curva di Johnsen (fig. 1) in particolare durante gli ultimi 35.000 anni. Ogni armonica è caratterizzata dal suo periodo e dalla sua fase, come mostrato in tabella 1.

E' interessante notare, tra le varie armoniche, la presenza di alcune di esse già note in letteratura:

- a) il periodo pari a 142.000 anni è in accordo con il Periodo Glaciale;
- b) il periodo pari a 37.000 anni è molto prossimo al cambiamento ciclico dell'asse terrestre;

curve for the temperature variations (“numerical” in fig. 1). This assumption was supported by literature, for example in JOHNSEN *et alii* (1992) and in GRIP (1993); it's generally accepted for Greenland a ratio isotopic concentration/temperature variation of  $\alpha_T=1.5^\circ\text{C}$  per 1‰ change of  $\delta^{18}\text{O}$ . Obviously each territory experienced a different impact of climate change on local temperature. For our model a more conservative gradient  $\alpha_T=1.2^\circ\text{C}$  per 1‰ change of  $\delta^{18}\text{O}$  has been considered. From the above discussion it follows that the meaning of the “numerical” curve reported in fig.1 is just that of a superposition of temperature harmonics, oscillating around an average surface temperature  $\bar{\theta}_{\text{surf}}$  corresponding to the zero point of F.F.T. application. So the temperature values obtained in this paper through the thermal waves approach, have the meaning of a temperature oscillations around  $\bar{\theta}_{\text{surf}}$ . Since at this point we were interested only on temperature perturbations, it was not necessary to determine the numerical value of  $\bar{\theta}_{\text{surf}}$  which, however, has been assumed high enough to exclude the formation of the permafrost.

We found, among others, nine significant harmonics whose sum matched Johnsen's curve well enough (fig. 1) in particular during the last 35,000 years. Each harmonic was characterized by its period and phase, displayed in table 1.

It's interesting to note among harmonics, the presence of some of them already known:

- a) 142,000 years period is in agreement with the Full Glacial Period;
- b) 37,000 years period is very close to the terrestrial cyclical axis changing;
- c) 18,000 and 22,000 years periods are very close to Milankovitch's cycle due to axial precession of the Earth.

n	$T_n$ (years)	$\Delta t_n$ (years)	$R_n$	$v(a_1)_n$ (cm/year)	$d(a_1)_n$ (m)	$v(a_2)_n$ (cm/year)	$d(a_2)_n$ (m)	$v(a_3)_n$ (cm/year)	$d(a_3)_n$ (m)
1	142,000	18,787	1	2.5	561	3.6	821	5.2	1168
2	55,000	11,756	0.24150	4.0	349	5.8	511	8.3	727
3	37,000	7,909	0.34650	4.9	287	7.1	419	10.1	596
4	22,000	4,926	0.21251	6.3	221	9.2	323	13.1	460
5	18,800	5,167	0.13420	6.8	204	10.0	299	14.1	425
6	15,800	5,955	0.15039	7.5	187	10.9	274	15.4	390
7	14,000	0	0.15825	7.9	176	11.6	258	16.4	367
8	9,300	0	0.09310	9.7	144	14.2	210	20.1	299
9	2,300	0	0.08056	19.5	71	28.6	105	40.5	149

Tab. 1 - Armoniche significative la cui somma approssima la curva di Johnsen  
 [n = numero d'onda termico;  $T_n$  = periodo dell'onda termica;  $\Delta t_n$  = ritardo di tempo (ritardo di fase);  $R_n$  = ampiezza relativa;  $(a_{1,2,3})_n$  = diffusività termica ( $a_1 = 7.7 \text{ m}^2/\text{y}$ ;  $a_2 = 15.5 \text{ m}^2/\text{y}$ ;  $a_3 = 30.0 \text{ m}^2/\text{y}$ );  $v(a_j)_n = 4a_j \pi/T_n^{0.5}$  (velocità di fase termica);  $d(a_{1,2,3})_n$  = profondità di attenuazione, in metri, alla quale l'ampiezza dell'onda termica diventa il 37% del massimo valore (in superficie) =  $(a_j T_n / \pi)^{0.5}$ ]

- Significant harmonics whose sum matched Johnsen's curve well enough, found in our analysis  
 [n = thermal wave number;  $T_n$  = thermal wave period;  $\Delta t_n$  = time delay (phase delay);  $R_n$  = relative amplitude;  $(a_{1,2,3})_n$  = thermal diffusivity ( $a_1 = 7.7 \text{ m}^2/\text{y}$ ;  $a_2 = 15.5 \text{ m}^2/\text{y}$ ;  $a_3 = 30.0 \text{ m}^2/\text{y}$ );  $v(a_j)_n = 4a_j \pi/T_n^{0.5}$  (thermal phase velocity);  $d(a_{1,2,3})_n$  = attenuation depth through the soil, in meter, at which the thermal wave amplitude is 37% of the maximum value (at the surface) =  $(a_j T_n / \pi)^{0.5}$ ]

c) i periodi pari a 18.000 e 22.000 anni sono molto vicini al ciclo di Milankovitch dovuto alla precessione assiale della Terra.

Applicando la F.F.T., abbiamo ottenuto la curva numerica seguente, legata all'ampiezza  $R_n$  delle oscillazioni di temperatura ambientali, normalizzate sull'ampiezza  $A_1$  della prima armonica:

$$\Theta = \frac{\theta(0, \tau) - \bar{\theta}_{surf}}{A_1} = \sum_{n=1}^9 R_n \cos \left[ \frac{2\pi}{T_n} (\tau - \Delta t_n) \right] \quad (1)$$

dove  $\theta(0, \tau)$  è la temperatura in superficie ( $x=0$ ) al tempo  $\tau$  (il tempo iniziale  $\tau=0$  circa 123.000 anni fa),  $\bar{\theta}_{surf}$  è la temperatura media di superficie ottenuta mediante la F.F.T.;  $T_n$  è il periodo dell'armonica "n" e  $\Delta t_n$  è il suo ritardo di fase.

L'espressione (1) è stata implementata come temperatura in superficie. Quindi si è considerato un mezzo isotropo ed omogeneo con tutte le proprietà termiche costanti nello spazio ed è stato risolto il seguente Problema al contorno di Dirichlet, dell'equazione della conduzione termica in una dimensione "x":

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2} & (a) \\ \theta(0, \tau) = \text{Johnsen "numerical" curve} & (b) \end{cases} \quad (2)$$

In Appendice è riportata la descrizione dei relativi dettagli e della soluzione ottenuta come sovrapposizione di nove armoniche. Per la linearità del problema, infatti, la fluttuazione termica  $\Theta$  attorno al valore medio  $\bar{\theta}_{surf}$  ottenuta arrangiando opportunamente la soluzione  $\theta(x, \tau)$  normalizzata sull'ampiezza  $A_1$  dell'onda termica con il periodo pari a 142.000 anni, consiste nella somma delle seguenti 9 armoniche, caratterizzate ciascuna dal periodo  $T_n$  come d'altronde è mostrato in Appendice:

$$\Theta = \frac{\theta(x, \tau) - \bar{\theta}_{surf}}{A_1} = \sum_{n=1}^9 R_n e^{-\sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} x} \cos \left[ \frac{2\pi}{T_n} (\tau - \Delta t_n) - \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} x \right] \quad (3)$$

Si osservi che, dal punto di vista fisico si assume, in questo modo, che la distribuzione di temperatura sia periodica nel tempo, senza limiti. Ciò, naturalmente, non consente di fissare il valore del gradiente geotermico che, quindi, ad ogni istante è determinato proprio dall'ipotesi della periodicità di ciascuna armonica. D'altronde, la determinazione della distribuzione di temperatura in epoche remote all'interno del sottosuolo, in un'area circoscritta e selezionata per lo studio, non risulta affatto semplice, per cui la periodicità può costituire una ragionevole assunzione.

Sono stati effettuati diversi calcoli con differenti coefficienti di diffusività termica "a", allo scopo di considerare, in un modo molto semplificato, la consistenza degli effetti della eventuale circolazione di acqua sotterranea.

## DESCRIZIONE DEL CAMPO DI TEMPERATURE MEDIANTE GRADAZIONI CROMATICHE

Si è ritenuto opportuno sviluppare un algoritmo per la visualizzazione cromatica del campo di temperature all'interno del sottosuolo, per evidenziare l'effetto delle "onde termiche" e le eventuali

Thus applying F.F.T. methodology, we obtained the following numerical curve related to the amplitude  $R_n$  of the environmental temperature oscillations, normalized by the amplitude  $A_1$  of the first harmonic:

where  $\theta(0, \tau)$  is the surface temperature ( $x=0$ ) at time  $\tau$  (the starting time  $\tau=0$  at about 123,000 years ago),  $\bar{\theta}_{surf}$  is the F.F.T. mean surface temperature;  $T_n$  is the period of the harmonic "n" and  $\Delta t_n$  is the phase delay.

Expression (1) was implemented as the surface temperature. Then we supposed an isotropic and homogenous body with all thermal properties constant in space. The following Dirichlet's boundary condition problem of the 1D "x" thermal conduction equation was solved:

In Appendix, it is shown the description of the details and the solution obtained as superimposition of nine harmonics. Due to the linearity of the problem, the thermal fluctuation  $\Theta$  around the mean value  $\bar{\theta}_{surf}$  obtained arranging opportunely the solution  $\theta(x, \tau)$  normalized to the amplitude  $A_1$  of the thermal wave with the period of 142,000 years, was the sum of the following 9 harmonics, each one with its period  $T_n$ , as it is shown in the same Appendix:

It should be pointed out that, by a physical point of view, it has been assumed a non limited periodicity of the temperature oscillations in time. That, naturally, does not allow to fix the value of the geothermal gradient which, therefore, at every time, is determined just by the mean of the hypothesis of the periodicity of each harmonic. However, the determination of the temperature distribution over remote ages, inside the subsoil, in a localized area sorted for the study, isn't a simple matter at all. For this reason the periodicity can constitute a reasonable starting assumption.

We worked out different calculations with different thermal diffusivity coefficient "a", to take into account, in a very simple way, the ground water circulation effect.

## DESCRIPTION OF TEMPERATURE FIELD THROUGH CHROMATIC VISUALIZATION

For the chromatic visualization of the subsoil thermal field, an algorithm has been developed in order to show heat waves effect and thermal gradient inversions (temperature decreasing with

inversioni dei gradienti (diminuzione di temperatura con la profondità). A questo scopo la curva ottenuta mediante la F.F.T. è stata normalizzata attorno al suo “punto di zero”. D'altronde, dal punto di vista fisico, la scelta equivale a considerare quale valore medio  $\bar{\theta}_{surf}$  delle oscillazioni termiche, proprio la temperatura del Pleistocene medio. Con questa scelta, inoltre, si è esaltato il contrasto cromatico durante il periodo temporale di interesse. Quindi è stato utilizzato il colore rosso per le temperature maggiori, il blu per le minori e cromatismi intermedi per le altre temperature. Alla temperatura media  $\bar{\theta}_{surf}$  (variazione di temperatura nulla) è stato associato il colore bianco. Il software presenta la possibilità interattiva di poter scegliere gli “step” temporali, il coefficiente di diffusività termica, la velocità di propagazione e l'evoluzione termica in un dato punto del sottosuolo.

### DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Sono stati condotti 3 tipi di simulazioni. Ognuno di essi è stato caratterizzato da un differente coefficiente di diffusività termica per prendere in considerazione, nel modo più semplice, la presenza di acqua che potrebbe diminuire l'intensità dell'inversione del gradiente termico. Il coefficiente di diffusività termica nelle simulazioni ha assunto dei valori compresi in un “range” tra 7.7 m<sup>2</sup>/anno (roccia asciutta) e 30 m<sup>2</sup>/anno (roccia umida; vedere ad esempio KREITH, 1981). Le figure 2-a, b, c mostrano, per differenti profondità, il rapporto isotopico dell'ossigeno durante gli ultimi 90.000 anni e, in accordo con la discussione di cui sopra, anche il trend di variazione

depth). For this purpose the F.F.T. curve has been normalized around its “zero point”. From a physical point of view, the choice is equivalent to consider, as the average value  $\bar{\theta}_{surf}$  of the thermal oscillations, the Middle Pleistocene temperature. Furthermore, this choice aimed to enhance the color contrast during the time period of our interest. Thus we have set up red colour for the highest temperature, blue colour for the lowest one and their lighter shade for the other temperatures. The colour index of the average temperature  $\bar{\theta}_{surf}$  (zero temperature variation) was set up as white. The program has the interactive capability to choose time step, thermal diffusivity coefficient, propagation velocity and the temperature evolution at a given point through the subsoil.

### RESULTS DISCUSSION

We have carried out three types of calculation. Each of them was characterized by a different thermal diffusivity coefficient to take into account, in a very simple way, the presence of water which may lower the thermal gradient inversion intensity. The thermal diffusivity coefficient in our calculations ranges from 7.7 m<sup>2</sup>/year (dry soil) to 30 m<sup>2</sup>/year (very moist soil; see for example KREITH, 1981). Figures 2-a, b, c show, for different depths and for different thermal diffusivities, the oxygen isotope ratio during the last 90,000 years and, accordingly to the previous discussion, the temperature variation trend as well.

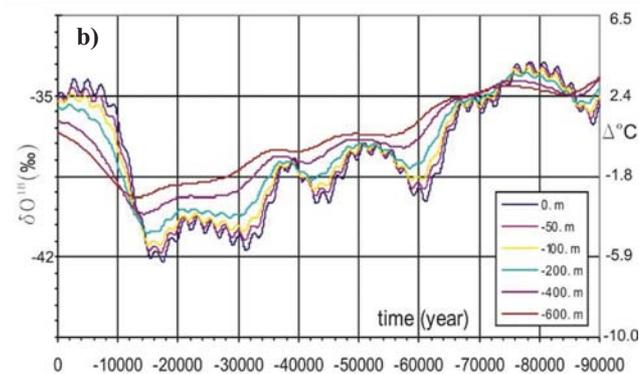
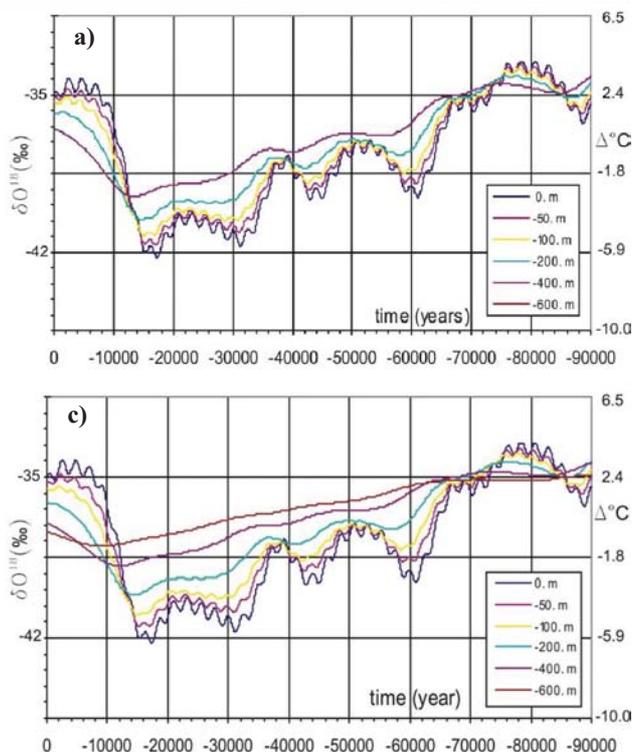


Fig. 2-a - Profili di temperature per differenti profondità (diffusività termica: 7.7 m<sup>2</sup>/year)  
- Temperature profiles at different depth through the soil (thermal diffusivity: 7.7 m<sup>2</sup>/year)

Fig. 2-b - Profili di temperature per differenti profondità (diffusività termica: 15.5 m<sup>2</sup>/year)  
- Temperature profiles at different depth through the soil (thermal diffusivity: 15.5 m<sup>2</sup>/year)

Fig. 2-c - Profili di temperature per differenti profondità (diffusività termica: 30.0 m<sup>2</sup>/year)  
- Temperature profiles at different depth through the soil (thermal diffusivity: 30.0 m<sup>2</sup>/year)

di temperatura per differenti diffusività termiche.

Le figure 3-a, b, c, mostrano i particolari delle figure 2 da 14.000 anni fa fino all'attuale. Le simulazioni indicano la plausibilità di numerose inversioni del gradiente di temperatura a profondità differenti negli ultimi 90.000 anni (punto d'intersezione tra curve differenti). All'incirca 10.000 anni fa, in particolare, il clima fu caratterizzato da un forte rialzo delle temperature. Come è chiaramente mostrato in figura 2, le variazioni di temperatura in profondità, sono tanto vicine alle temperature superficiali quanto alte sono le diffusività termiche considerate. Questo comportamento ha un significato fisico congruente, dato che un alto valore della diffusività termica tende a diminuire ogni differenza spaziale di temperatura. Per studiare con maggiore dettaglio il comportamento del sottosuolo negli ultimi 14.000 anni, sono stati riportati i particolari delle figure 2-a, b, c. Nel modello per il sottosuolo asciutto (diffusività pari a  $7.7 \text{ m}^2/\text{anno}$ , fig. 3-a), si osservano molte inversioni di gradiente da 600 metri di profondità fino alla superficie, tra i 14.000 anni e gli 8.000 anni fa (diffusività pari a  $15.5 \text{ m}^2/\text{anno}$ , fig. 3-b) e fino ai 10.000 anni fa (diffusività pari a  $30 \text{ m}^2/\text{anno}$ , fig. 3-c).

Le figure 4-a, b, c, d mostrano immagini a colori "catturate" durante il processo di calcolo. Esse mostrano le perturbazioni termiche attorno al valore medio assunto  $\theta_{\text{surf}}$  (definito precedentemente come temperatura media del Pleistocene medio, di colore bianco, relativa a 10.000 anni fa) per i 1.000 metri di profondità, per quattro tempi differenti (scelti dopo aver analizzato le figure precedenti) e con tre coefficienti di diffusività differenti. Appare evidente la plausibilità, tra le altre e con le condizioni assunte, di una sensibile inversione di gradiente termico (rosso alla sommità, blu alla base del livello) durante l'Olocene. Le profondità coinvolte dipendono, nelle simulazioni, dalle condizioni specifiche del sottosuolo (coefficienti di diffusività termica differenti). E' ragionevole

Figures 3 -a, -b and -c show zooms of figures 2 from 14,000 years ago up to now. It is evident from figures that several gradient inversions of the temperature perturbation occurred at different depth during the last 90,000 years (cross point among different curves). About 10,000 years ago, in particular, a strong temperature rise characterized the climatic behaviour. As it is clearly shown in figures 2, deep soil temperatures variation was as much close to the surface temperatures as high was the thermal diffusivity considered. This behavior has a consistent physical meaning, because high thermal diffusivity lower any spatial temperature difference. To study in more details the last 14,000 years soil behavior, we have reported zooms of figures 2-a,-b,-c. In the dry soil model (diffusivity equal to  $7.7 \text{ m}^2/\text{year}$ , fig. 3-a) several gradient inversions are shown from 600 meters in depth up to the surface, ranging from 14,000 years ago up to 4,000 years ago. Through the same soil depth, thermal inversions occurred from 14,000 years ago up to 8,000 years ago (diffusivity equal to  $15.5 \text{ m}^2/\text{year}$ , fig. 3-b) and up to 10,000 years ago (diffusivity equal to  $30 \text{ m}^2/\text{year}$ , fig. 3-c).

Figures 4-a, b, c and d show coloured images caught from movies program runs. They display temperature perturbations around the assumed average value  $\theta_{\text{surf}}$  (previously defined: Middle Pleistocene average temperature, white color, 10,000 years ago) through 1,000 meters in depth, at four different times (chosen after analyzing the previous figures) and with three different diffusivity coefficients. From the movie figures it is evident that during the Holocene a sensible thermal gradient inversion (red at the top, blue at the bottom of the layer) may have taken place. The soil depth involved depends, in our simulation, on the specific soil condition (different thermal diffusivity coefficients). Furthermore, by the means of this kind of simulation, it seems that more than one gradient inversion happened during the period we have analyzed. In particular, in fig. 4-a it is shown a thermal inversion from the

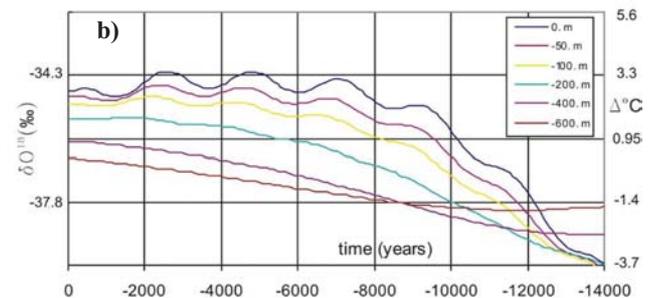
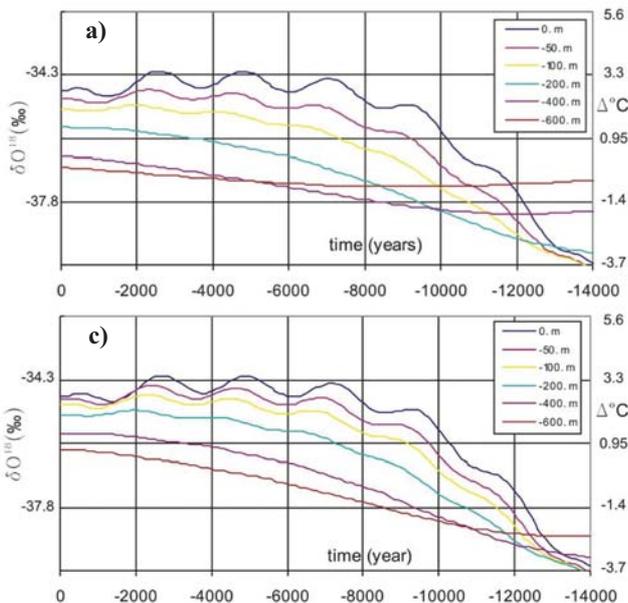


Fig. 3-a - Profili di temperatura fino a 14.000 anni fa (diffusività termica:  $7.7 \text{ m}^2/\text{year}$ )  
- Temperature profiles up to 14,000 years ago (thermal diffusivity:  $7.7 \text{ m}^2/\text{year}$ )

Fig. 3-b - Profili di temperatura fino a 14.000 anni fa (diffusività termica:  $15.5 \text{ m}^2/\text{year}$ )  
- Temperature profiles up to 14,000 years ago (thermal diffusivity:  $15.5 \text{ m}^2/\text{year}$ )

Fig. 3-c - Profili di temperatura fino a 14.000 anni fa (diffusività termica:  $30 \text{ m}^2/\text{year}$ )  
- Temperature profiles up to 14,000 years ago (thermal diffusivity:  $30 \text{ m}^2/\text{year}$ )

le supporre, quindi, che più di un'inversione di gradiente possa essersi verificata durante il periodo analizzato. In particolare, in fig. 4a è mostrata un'inversione termica nei primi 100 metri, circa 10.000 anni fa e nei primi 600 metri, circa 4.000 anni fa. La fig. 4d mostra la situazione ottenuta per un sottosuolo molto umido (diffusività termica pari a  $30 \text{ m}^2/\text{anno}$ ). Anche in queste condizioni le nostre simulazioni evidenziano una chiara inversione intorno ai 9.000-10.000 anni fa per i primi 200-300 metri.

Risulta evidente l'importanza della variabilità dei parametri termici alle varie profondità.

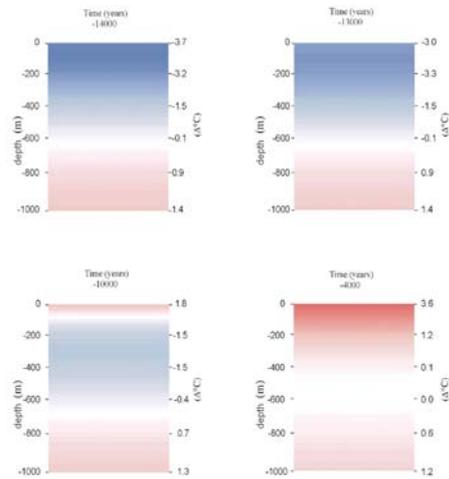


Fig. 4-a - Visualizzazione cromatica delle anomalie termiche calcolate per i primi 1.000 metri di profondità, per tempi differenti (diffusività termica:  $7.7 \text{ m}^2/\text{year}$ )

- Chromatic display of the calculated temperature anomalies through the first 1,000 meters of the soil depth, at different time (thermal diffusivity:  $7.7 \text{ m}^2/\text{year}$ )

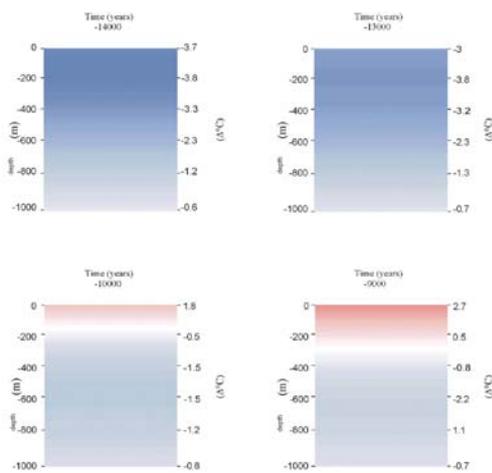


Fig. 4-c - Visualizzazione cromatica delle anomalie termiche calcolate per i primi 1.000 metri di profondità, per tempi differenti (diffusività termica:  $30. \text{ m}^2/\text{year}$ )

- Chromatic display of the calculated temperature anomalies through the first 1,000 meters of the soil depth, at different time (thermal diffusivity:  $30. \text{ m}^2/\text{year}$ )

surface through the first 100 meters, about 10,000 years ago and through the first 600 meters, about 4,000 years ago. Fig. 4-d shows the situation obtained by a very moistly soil (thermal diffusivity equal to  $30 \text{ m}^2/\text{year}$ ). Also in this conditions our simulations display a clear inversion around 9,000-10,000 years ago through the first 200-300 meters.

From the above discussion, the occurrence of a thermal gradient inversion point through the soil depth, seems to be feasible. The likelihood of this eventuality is as high as low is the local geothermal gradient. Another point that should be considered is the importance of the thermal parameters variability through the depth of the soil.

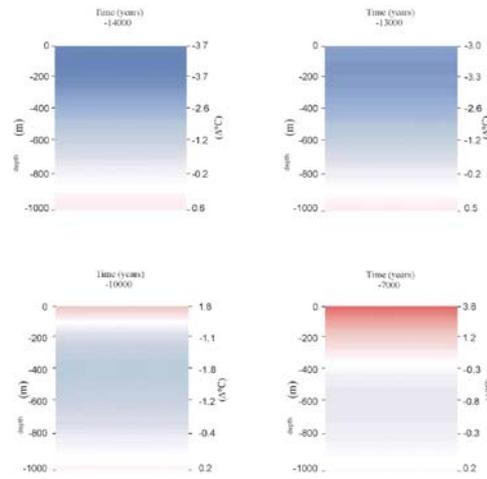


Fig. 4-b - Visualizzazione cromatica delle anomalie termiche calcolate per i primi 1.000 metri di profondità, per tempi differenti (diffusività termica:  $15.5 \text{ m}^2/\text{year}$ )

- Chromatic display of the calculated temperature anomalies through the first 1,000 meters of the soil depth, at different time (thermal diffusivity:  $15.5 \text{ m}^2/\text{year}$ )

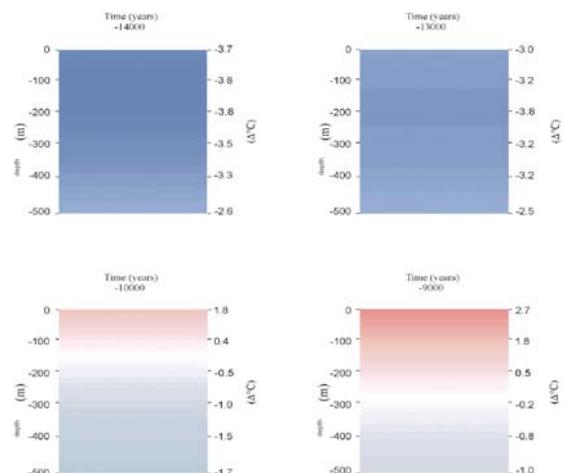


Fig. 4-d - Visualizzazione cromatica delle anomalie termiche calcolate per i primi 500 metri di profondità, per tempi differenti (diffusività termica:  $30. \text{ m}^2/\text{year}$ )

- Chromatic display of the calculated temperature anomalies through the first 500 meters of the soil depth, at different time (thermal diffusivity:  $30. \text{ m}^2/\text{year}$ )

## DESCRIZIONE DEL MODELLO NUMERICO

È riportata una breve descrizione del modello numerico sviluppato da due degli autori (PASCULLI & SCIARRA, 2005), relativo alle fenomenologie discusse nel presente lavoro, simulate mediante l'equazione monodimensionale non lineare di trasferimento di calore mediante conduzione. Per simulare la variabilità spaziale è stato utilizzato il Metodo agli Elementi Finiti (FEM), mentre è stato opportunamente selezionato un algoritmo incondizionalmente stabile allo scopo di modellare l'evoluzione temporale della fenomenologia considerata. Pertanto è stata risolta numericamente la seguente equazione:

$$\begin{cases} (\rho \cdot c) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x, T) \cdot \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] + \dot{Q} & (a) \\ \theta(0, \tau) = \text{Johnsen sperimental curve} & (b) \\ \theta(x, 0) = \theta(0, 0) + \beta_T \cdot x & (c) \end{cases} \quad (4)$$

dove  $(\rho \cdot c)$  ( $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ) =  $[\phi \rho_w c_w + (1-\phi) \rho_s c_s]$  è la capacità termica volumetrica del terreno;  $\phi(\%)$  è la porosità;  $\rho_w$ ,  $c_w$  e  $\rho_s$ ,  $c_s$  sono, rispettivamente, la densità e la capacità termica specifica dell'acqua e del terreno;  $k(x, T)$  ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ) è la conduttività termica funzione sia dello spazio (tipo di materiale, sua porosità etc.), sia della temperatura  $T$ ;  $Q$  è la produzione termica nell'unità di volume e nell'unità di tempo;  $\theta(0, \tau)$  è la temperatura superficiale estratta direttamente dalle curve di Johnson,  $\beta_T$  è il gradiente geotermico iniziale.

In particolare, per includere anche gli effetti della formazione o scioglimento dell'eventuale permafrost, è stata considerata la seguente espressione della capacità termica, denominata "apparente":

$$(\rho \cdot c) = \begin{cases} (1 - \phi) \cdot \rho_s \cdot c_s + \phi \cdot \rho_w \cdot c_w & T > T_L \\ (1 - \phi) \cdot \rho_s \cdot c_s + \Theta \cdot \phi \cdot \rho_f \cdot c_f + (1 - \Theta) \cdot \phi \cdot \rho_{ice} \cdot c_{ice} + \rho_f \cdot H_L \cdot \phi \cdot \frac{d\Theta}{dt} & T_S \leq T \leq T_L \\ (1 - \phi) \cdot \rho_s \cdot c_s + \phi \cdot \rho_{ice} \cdot c_{ice} & T < T_S \end{cases} \quad (5)$$

dove  $H_L = 335$ . ( $kJ \cdot kg^{-1}$ ) è il calore latente di congelamento dell'acqua pura,  $T_L$  è la temperatura del passaggio di stato dell'acqua pura a pressione atmosferica (273. K), mentre  $T_S$  è la temperatura media di congelamento del mezzo eterogeneo di cui è formato il permafrost.  $\Delta T = T_L - T_S$  è l'intervallo di temperatura entro cui l'eventuale congelamento della miscela di terreno ed acqua si realizza completamente, mentre la seguente espressione è la percentuale di acqua in fase liquida:

$$\Theta = \begin{cases} \exp \left[ - \left( \frac{T - T_L}{w} \right)^2 \right] & T < T_L \\ 1 & T \geq T_L \end{cases} \quad (6)$$

dove  $w$  è un parametro numerico che caratterizza la larghezza della gaussiana. I valori numerici dei parametri di scambio termico e le loro relazioni con la temperatura sono stati tratti, in particolare, da ROY *et alii* (1981) e da LUNARDINI (1987). Si noti che a differenza del Problema (1), il Problema (4) richiede la scelta di un gradiente geotermico all'istante assunto come iniziale. In questo modo, sono state

## NUMERICAL MODEL DESCRIPTION

In the following it is reported a brief description of a numerical modelling, developed by two of the authors (PASCULLI & SCIARRA, 2005), related to the phenomenologies discussed in the present paper, which have been simulated by a 1D dimensional, non linear conduction heat transfer equation. The Finite Element Method (F.E.M.) has been implemented in order to model the spatial variability, while an unconditionally stable algorithm (CRANK-NICOLSON, 1947) has been selected to carry out the temporal evolution of the phenomena. Thus the following equation has been numerically solved:

where  $(\rho \cdot c)$  ( $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ) =  $[\phi \rho_w c_w + (1-\phi) \rho_s c_s]$  is the volumetric thermal capacity of the rocks;  $\phi(\%)$  is the porosity;  $\rho_w$ ,  $c_w$  and  $\rho_s$ ,  $c_s$  are, respectively, the density and the specific thermal capacity of the water and the soil;  $k(x, T)$  ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ) is the thermal conductivity dependent on both space (type of material, its porosity etc.) and temperature  $T$ ;  $Q$  is the thermal production in the volume unit and the time unit,  $\theta(0, \tau)$  is the surface temperature extracted directly from the Johnson's curves,  $\beta_T$  is the initial geothermal gradient.

In particular, in order to include also the effects of eventual permafrost formation or melting, the following expression of the thermal capacity called "apparent", has been considered:

where  $H_L = 335$ . ( $kJ \cdot kg^{-1}$ ) is the latent heat of freezing of the fresh water,  $T_L$  its thawing temperature, at atmospheric pressure (273. K), while  $T_S$  is the selected average freezing temperature of the heterogeneous mixture of different substances of which the permafrost is formed. So  $\Delta T = T_L - T_S$  is the temperature range within which the eventual freezing of ground and water mixture fully develops, while the following expression is the percentage of water in liquid phase:

in which  $w$  is a numerical parameter that characterizes the Gaussian width. The numerical values of the thermal exchange parameters and their relations with the temperature have been taken from ROY *et alii* (1981) and from LUNARDINI (1987). Notice that unlike Problem (1), Problem (4) requires the assumption of a geothermal gradient at the instant assumed as initial. In this way, two hypotheses (geothermal

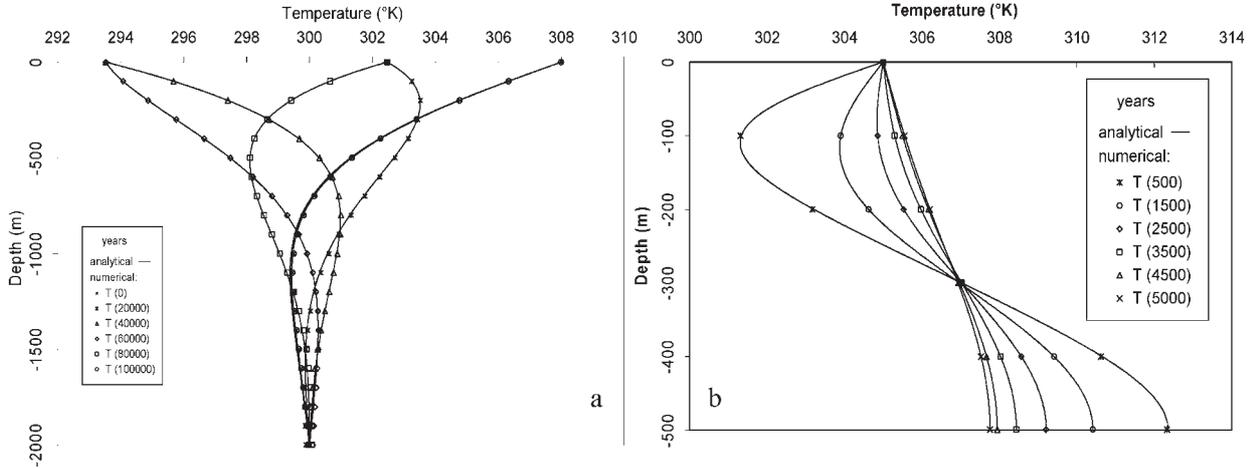


Fig. 5 - a): “Dirichlet Problem”; b): “Neumann Problem” con gradiente geotermico iniziale  
 - a): “Dirichlet Problem”; b): “Neumann Problem” with original geothermal gradient

introdotte due ipotesi (valore del gradiente geotermico e istante al quale si riferisce) che potrebbero rivelarsi anche arbitrarie. Da ciò consegue, in mancanza di dati certi, la necessità di elaborare, comunque, dei calcoli parametrici.

Nelle figure 5a e 5b si riportano, rispettivamente, il primo e il secondo test di confronto tra il modello numerico e due soluzioni analitiche.

Il primo test (problema di Dirichlet) è relativo ad una oscillazione armonica della temperatura, espressione (7), con ampiezza massima di  $\Delta T = \pm 8K$ , attorno ad una temperatura di  $T_{surf} = 300 K$  e periodo di  $T_p = 10^5$  anni, per il quale si è assunta una temperatura fissa di  $300 K$  ad una profondità di  $2.000$  metri, con un coefficiente di diffusività termica  $a = 7 m^2/year$ .

$$T_{surf}(x, \tau) = \bar{T}_{surf} + \Delta T \cdot e^{-\sqrt{\frac{\pi}{a \cdot T_p}} x} \cos \left[ \frac{2\pi}{T_p} \tau - \sqrt{\frac{\pi}{a \cdot T_p}} \cdot x \right] \quad (7)$$

Lo scopo del secondo test è stato quello di verificare l'accuratezza dell'algorithm numerico nel simulare flussi di calore (problema di Neumann). La soluzione analitica dell'equazione di scambio termico, con le condizioni:

$$-k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h \cdot [T(0, \tau \geq 0) - T_{air}]; \quad -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0; \quad T(x, \tau = 0) = T_0 + \frac{(T_L - T_0)}{L} \cdot x \quad (8)$$

dove  $k = 27.14 (J \text{ year}^{-1} m^{-1} K^{-1})$ ;  $h = 31.5 \times 10^7 (J \text{ year}^{-1} m^{-2} K^{-1})$ ;  $T_{air} = 305. K$ ;  $L = 500. m$ ;  $T_L = 315. K$ ;  $T_0 = 295. K$ , si ricava agevolmente e risulta:

gradient value and the instant at which it is related to) have been introduced.

From that it follows, in lack of reliable data, the need to elaborate parametric calculations.

In figures 5a and 5b are shown, respectively, the first and the second comparison test between the numerical model and two analytic solutions.

The first test (Dirichlet's problem) was related to a harmonic temperature oscillation, expression (7), with a maximum amplitude  $\Delta T = \pm 8K$  around a temperature  $T_{surf} = 300 K$  and a period  $T_p = 10^5$  years, for which a selected temperature of  $300 K$  at a depth of  $2,000$  meters was fixed, with a thermal diffusivity coefficient  $= 7 m^2/year$ .

The second test purpose was to verify the accuracy of the numerical algorithm in simulating heat flows (Neumann's problem). The analytic solution of the thermal exchange equation, with the conditions:

$$T(x, \tau) = T_{air} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a \cdot \lambda_n^2 \tau} \frac{2 \left\{ (T_0 - T_{air}) \cdot \sin(\lambda_n L) + \frac{(T_L - T_0)}{(\lambda_n L)} [1 - \cos(\lambda_n L)] \right\}}{(\lambda_n L) + \sin(\lambda_n L) \cos(\lambda_n L)} \cos[\lambda_n (x - L)] \quad (9)$$

where  $k = 27.14 (J \text{ year}^{-1} m^{-1} K^{-1})$ ;  $h = 31.5 \times 10^7 (J \text{ year}^{-1} m^{-2} K^{-1})$ ;  $T_{air} = 305. K$ ;  $L = 500. m$ ;  $T_L = 315. K$ ;  $T_0 = 295. K$ , is easy to obtain and it takes the following expression:

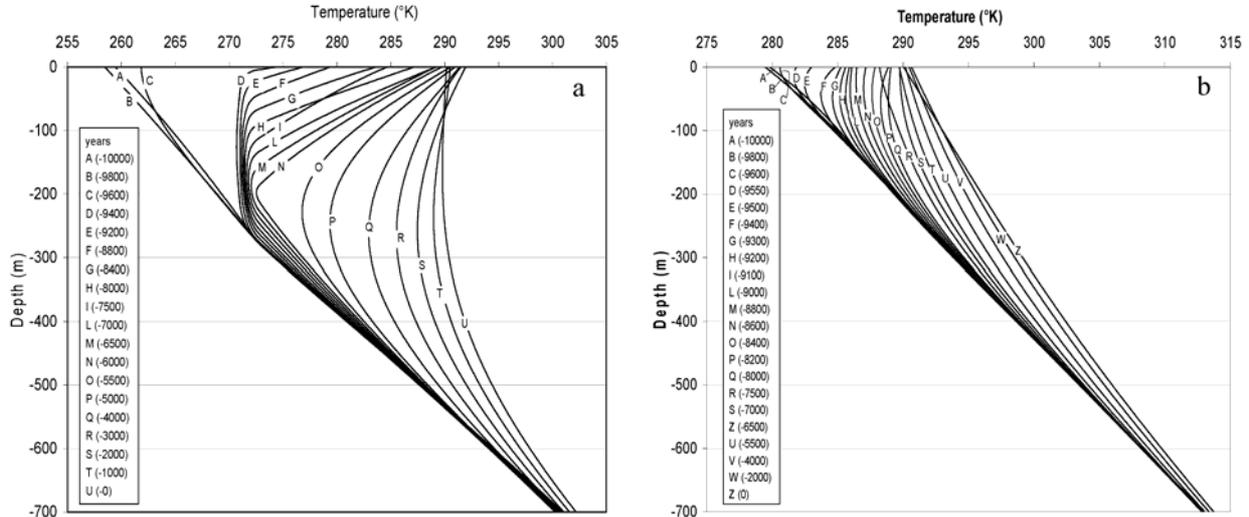


Fig. 6 - Distribuzione di temperatura a)  $\alpha_T = 1.5$  (K); b)  $\alpha_T = 0.5$  (K)  
 - Temperature distribution a)  $\alpha_T = 1.5$  (K); b)  $\alpha_T = 0.5$  (K)

dove  $a = 7. \text{ m}^2 \text{ year}^{-1}$  e  $\lambda_n$  è l'autovalore n-esimo dell'equazione trascendentale:

$$\cot g(\lambda_n L) = -\lambda_n L / \text{Biot}, \text{ Biot} = h \cdot L / k \approx 5833. \tag{10}$$

Quindi sono state sovrapposte 20 componenti per trovare i valori numerici dell'equazione (9).

Per entrambi i test, gli errori relativi tra i risultati analitici e i risultati numerici sono, per il primo ed il secondo, rispettivamente, inferiori allo 0.1% ed allo 0.75% con un massimo errore assoluto di circa 0.12 K, perciò del tutto accettabili per gli scopi del lavoro.

Le Fig. 6a e 6b (PASCULLI & SCIARRA, 2005) mostrano i risultati numerici ottenuti ponendo un gradiente geotermico iniziale  $\beta_T = 40 \times 10^{-3} \text{ (K/m)}$ , al tempo  $\tau = 122.000$  anni fa e, quindi, rispettivamente,  $\alpha_T = 1.5 \text{ (}\Delta\text{C}/10^{-3} \delta^{18}\text{O)}$  e  $\alpha_T = 0.5 \text{ (}\Delta\text{C}/10^{-3} \delta^{18}\text{O)}$ ,

where  $a = 7. \text{ m}^2 \text{ year}^{-1}$  and  $\lambda_n$  is the n-th eigenvalue solution of the transcendental equation:

Then we superimposed 20 components to find out the numerical value of equation (9).

For both the tests, the relative errors among the analytical solutions and the numerical ones are below 0,1% for the first one and 0,75% for the second one with a maximum absolute error of approximately 0.12 K. This is fully acceptable for purposes of this work.

Figures 6a and 6b (PASCULLI & SCIARRA, 2005) show the numerical results obtained using an initial geothermal gradient  $\beta_T = 40 \times 10^{-3} \text{ (K/m)}$ , at the time  $\tau = 122,000$  years ago, then, respectively  $\alpha_T = 1.5 \text{ (}\Delta\text{C}/10^{-3} \delta^{18}\text{O)}$  and  $\alpha_T = 0.5 \text{ (}\Delta\text{C}/10^{-3} \delta^{18}\text{O)}$ ,

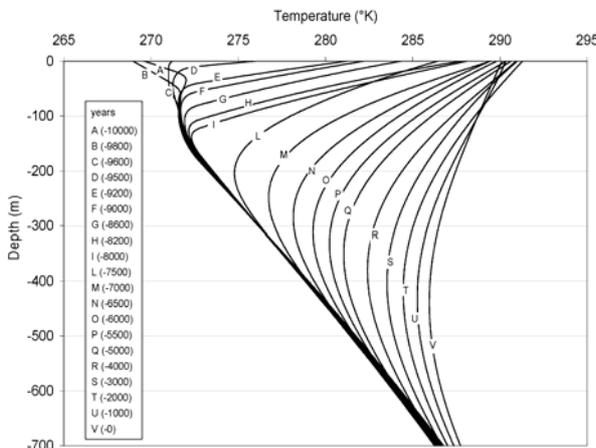


Fig. 7 - Distribuzione della temperatura  $\alpha_T = 1$  (K);  $\beta_T = 10. \times 10^{-3}$  (K)  
 - Temperature distribution  $\alpha_T = 1$  (K);  $\beta_T = 10. \times 10^{-3}$  (K)

mentre la Fig. 7 mostra i risultati numerici ottenuti con un gradiente geotermico iniziale relativamente basso  $\beta_T = 10 \times 10^{-3}$  (K/m) e  $\alpha_T = 1 \cdot x(\Delta C/10^{-3} \delta^{18}O)$ . In particolare la Fig. 5b, pur non prevedendo la formazione di permafrost, mostra, comunque, delle inversioni del gradiente geotermico nei primi 100 metri, intorno ai 9.000 anni fa.

I risultati analitici ottenuti con l'approccio descritto nei precedenti paragrafi sono, comunque, qualitativamente congruenti con i risultati numerici ottenuti sia in condizioni diverse, sia in condizioni simili.

D'altronde, si osserva che, mentre il modello analitico, per il quale è stato assunto un gradiente geotermico iniziale nullo, prevede la formazione di più zone di inversione a diverse profondità, il modello numerico, che include anche dei preesistenti gradienti geotermici, escluderebbe questa eventualità.

### FORMAZIONE DEI TRAVERTINI

Cambiamenti di temperatura dell'ordine del grado centigrado possono dare origine a sostanziali variazioni di solubilità delle rocce nelle acque di circolazione sotterranea. Questo fenomeno ha una grande importanza, ad esempio, in contesti caratterizzati da rocce calcaree. Infatti, per ogni grado centigrado di diminuzione di temperatura dell'acqua sotterranea, circa 1.7 mg of  $CaCO_3$  si dissolvono in ogni litro di soluzione. Lo sviluppo del carsismo o la deposizione dei travertini sono in stretta connessione con le variazioni di temperatura sotterranea e la conseguente variazione di solubilità delle acque. Per il primo fenomeno si ha infatti che all'interno delle cavità carsiche e delle fratture del sottosuolo, si abbia un eccesso di  $CO_2$ ; le soluzioni acquose sono in equilibrio con la  $CO_2$  alle temperature del sistema. Ciò significa che l'acqua del sottosuolo, permeando rocce carbonatiche più fredde può sciogliere il calcare dando origine a fenomeni carsici. Contrariamente, la soluzione ricca di carbonato di calcio, attraversando rocce più calde può dare origine a depositi di travertino.

Sebbene non ci sia attualmente una spiegazione soddisfacente per questa fenomenologia, molti Autori prendono in considerazione l'influenza che i cambiamenti climatici potrebbero avere ed avere avuto sul meccanismo che porta alla formazione di alcuni tipi di travertino la cui genesi non sarebbe connessa alla presenza di campi geotermici (DRAMIS *et alii*, 1999). Infatti, in un contesto caratterizzato da una circolazione idrica sotterranea lenta, attraverso un sistema altamente fratturato, l'acqua sarebbe in equilibrio termico con la roccia. La presenza di un'inversione termica ad una certa profondità dovuta alla propagazione delle più basse temperature superficiali esistenti nel tardo Pleistocene, avrebbe causato nelle acque di circolazione, un arricchimento in  $CO_2$  e quindi una maggiore capacità di dissoluzione del carbonato di calcio. Se ad una circolazione idrica di questo tipo fosse associata una rapida risalita delle acque, la temperatura esterna più alta avrebbe potuto causare una perdita di  $CO_2$  e, conseguentemente, la deposizione di travertino.

### CONCLUSIONI

L'applicazione del modello analitico discusso in questo lavoro,

while fig. 7 shows numerical results obtained with an initial geothermal gradient relatively low  $\beta_T = 10 \times 10^{-3}$  (K/m) and  $\alpha_T = 1 \cdot x(\Delta C/10^{-3} \delta^{18}O)$ . In particular Fig. 6b, shows geothermal gradient inversion through the first 100 meters depth, around 9,000 years ago, notwithstanding no permafrost occurrence is predicted under the selected conditions.

The analytical results obtained by means of the approach described in the previous paragraphs are qualitatively consistent with the numerical results obtained both in different and in similar conditions.

However, it's possible to observe that, while the analytical model, for which it was assumed initial vanishing geothermal gradient, provides the occurrence of several inversion zones at different depths, the numerical model, that includes also pre-existing geothermal gradient, would exclude this eventuality.

### TRAVERTINE FORMATION

Temperature changes in the centigrade order could lead to substantial variations in the solubility of minerals dissolved in subsoil waters. This is a relevant phenomenon occurring in limestone contexts. When the water solution temperature decreases by one centigrade, approximately 1.7 mg of  $CaCO_3$  dissolves for each litre of solution. Karstification development and travertine deposits are closely connected to the subsoil temperature variations and the consequent water solubility variations. The first creates an excess of  $CO_2$  in karst cavities and fractures. For this reason aqueous solutions are in a saturation equilibrium with  $CO_2$  at the surrounding temperature. It means that underground water flowing through colder carbonate soil could dissolve carbonate rocks causing karst formations. In contrast, calcium carbonate solution, flowing through warmer rocks could generate travertine deposits.

Although there is no satisfactory explanation yet, several authors point out the influence that climatic changes could cause in the mechanisms leading to some types of travertine formation whose genesis is not connected to geothermal fields (DRAMIS *et alii*, 1999). Indeed there is a perfect thermal equilibrium between rocks and water that circulates slowly in a highly fractured system underground. A perturbation of the thermal gradient at a certain depth, due to the propagation of the lowest superficial "thermal waves" of the late Pleistocene, would have caused an increase of  $CO_2$  in the circulating waters and therefore a higher capacity of dissolving calcium carbonate. If the hydro circulation is related to the water upwelling, an higher surface temperatures may have lead to a loss of  $CO_2$  and travertine deposition.

### CONCLUSIONS

The application of the discussed analytical model, by means of

mediante la tecnica delle “onde termiche”, ha ulteriormente dimostrato la plausibilità di inversioni del gradiente termico anche in zone abbastanza calde da escludere la formazione di permafrost in presenza di un gradiente geotermico iniziale nullo e caratterizzate da un'intensità sufficiente ad indurre, per esempio, proprio la formazione di travertino, dovuta alla risalita di acqua.

Il modello numerico agli elementi finiti, inoltre, ha consentito di studiare la fenomenologia considerata, includendo, tra altro, anche un gradiente geotermico iniziale (con intensità parametrizzata) e la formazione di permafrost. Anche l'approccio numerico ha confermato la plausibilità di inversioni geotermiche.

In un lavoro successivo si svilupperà un modello non lineare 2D agli elementi finiti che includa una legge convettiva per la simulazione della circolazione idrica proveniente sia dalla superficie, sia dalle parti più profonde. Inoltre sarà implementato anche un modello per la formazione del travertino che comporterà l'inclusione di modelli per la variazione non solo dei parametri di scambio di calore per conduzione, ma anche per la variazione della porosità del materiale, in funzione della precipitazione di sali in grado di occludere i passaggi necessari per l'eventuale deflusso termoidrico.

**APPENDICE**

Come è noto da KÖRNER (1990), la soluzione della seguente equazione di conduzione monodimensionale del calore:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2} \\ \theta(0, \tau) = \exp\left(i \frac{2\pi}{T} \tau\right) \\ \theta(x, 0) \end{cases} \quad (x > 0) \tag{A.1}$$

con le condizioni al contorno:

subject to the boundary conditions:

$$\theta(0, \tau) = \exp\left(i \frac{2\pi}{T} \tau\right) \tag{A.2}$$

dove “T” è il periodo, ipotizzando  $\theta(x, \tau)$  limitato per tutti i  $\tau$  e le  $x > 0$ , assume la seguente espressione:

where “T” is the period, assuming  $\theta(x, \tau)$  limited for all  $\tau$  e le  $x > 0$ , is given by:

$$\theta(x, \tau) = \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{aT}} x\right] \cdot \exp\left\{i \cdot \left[\frac{2\pi}{T} \tau - \sqrt{\frac{\pi}{aT}} x\right]\right\} \tag{A.3}$$

L'equazione A.1 è lineare perciò assumendo le seguenti condizioni al contorno (oscillazioni di temperatura attorno ad una temperatura superficiale media, ottenuta mediante l'applicazione della F.F.T. alla curva sperimentale di Johnsen):

The equation A.1 is linear, thus assuming the following boundary conditions (temperature oscillations around a mean surface temperature):

$$\theta(0, \tau) = \sum_{n=1}^9 A_n R_n \exp\left[i \frac{2\pi}{T_n} (\tau - \Delta t_n)\right] + \bar{\theta}_{surf} \tag{A.4}$$

where all the parameters have been already previously described, the

in cui tutti i parametri sono stati precedentemente descritti, la soluzione dell'equazione A.1 è la sovrapposizione delle relative singole

$$\theta(0, \tau) = \sum_{n=1}^9 A_1 R_n \exp \left[ i \frac{2\pi}{T_n} (\tau - \Delta t_n) \right] + \bar{\theta}_{surf} \quad A.5$$

soluzioni:

$$\frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{n=1}^9 \left[ i \cdot \frac{2\pi}{T_n} \right] A_1 R_n \exp \left\{ - \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} x + i \cdot \left[ \frac{2\pi}{T_n} (\tau - \Delta t_n) - \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} x \right] \right\} \quad A.6$$

$$a \frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^9 a \left[ - \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} - i \cdot \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} \right]^2 A_1 R_n \exp \left\{ - \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} x + i \cdot \left[ \frac{2\pi}{T_n} (\tau - \Delta t_n) - \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} x \right] \right\} \quad A.7$$

come, d'altronde, si può dedurre sostituendo la A.5 nella A.1:

Ora, ogni termine della sommatoria in A.6 è uguale all'analogo termine in A.7, come si ottiene semplicemente mettendo a confronto le due

$$a \left[ - \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} - i \cdot \sqrt{\frac{\pi}{aT_n}} \right]^2 = a \left[ \frac{\pi}{aT_n} + (i)^2 \frac{\pi}{aT_n} + i \cdot \frac{2\pi}{aT_n} \right] = i \cdot \frac{2\pi}{T_n} \quad A.8$$

espressioni ed osservando dalla A.8 che vale la seguente uguaglianza:

Quindi, dato che A.7 è uguale ad A.6, la funzione A.5 è la soluzione dell'equazione A.1.

Infine, considerando la parte reale di ciascun esponenziale e con-

solution of the equation A.1 is the following one:

as it could be inferred by substituting A.5 in A.1:

Now, each term of the sum in A.6 is equal to the analogous term in A.7, as it follows easily comparing the two expressions and observing that from A.8:

Thus, as A.7 is equal to A.6, the function A.5 is the solution of equation A.1.

Finally, taking the real part of each exponential and considering the ratio  $\Theta = (\theta_{(x,\tau)} - \bar{\theta}_{surf})/A_1$ , we found the expression (3).

## OPERE CITATE / REFERENCES

- BODRI L., CERMAK V. & KUKKONEN I.T. (2001) - *Climate change of the last 2000 years inferred from borehole temperatures: data from Finland*. Global and Planetary Change, **29** (3-4): 189-200.
- DAHL-JENSEN D., MOSEGAARD K., GUNDESTRUP N., JOHNSEN S.J., HANSEN A.W., CLOW G.D. & BALLING N. (1998) - *Past temperatures directly from the Greenland Ice Sheet*. Science, **282**: 268-271.
- DRAMIS F., MATERAZZI M. & CILLA G. (1999) - *Influence of climatic changes on travertine deposition during Holocene: a new hypothesis*. Physics and chemistry of the Earth. Elsevier Publisher.
- GRIP MEMBERS (1993) - *Climate instability during the last interglacial period recorded in the GRIP ice core*. Nature, **364**: 203-207.
- JOHNSEN S.J., CLAUSEN H.B., DANSGAARD W., GUNDESTRUP N., HAMMER C.U., IVERSEN P. & STEFFENSEN J.P. (1992) - *Irregular glacial interstadials recorded in a new Greenland ice core*. Nature, **359**: 311-313.
- JOHNSEN S.J., DAHL-JENSEN D., GUNDESTRUP N., STEFFENSEN J.P., CLAUSEN H.B., MILLER H., MASSON-DELMOTTE V., SVEINBJRNDOTTIR A.E. & WHITE J. (2001) - *Oxygen isotope and palaeotemperature records from six Greenland ice-core stations: Camp Century, Dye-3, GRIP, GISP2, Renland and NorthGRIP*. Journal of Quaternary Science, **16** (4): 299-307.
- KÖRNER T.W. (1990) - *Fourier Analysis*. Cambridge Press, 24-27.
- KREITH F. (1981) - *Principi di trasmissione del calore* (Heat transfer principles). Liguori Editore. ISBN 88-207-0356-4.
- LUIKOV A. (1980) - *Heat and Mass Transfer*. Mir Publishers, Moscow, 188-191.
- LUNARDINI V. J. (1987) - *Freezing of soil with an unfrozen water content and variable thermal properties*. CRREL report, Nat. Tech. Info. Serv., **88-2**: 23.
- ROY R.F., BECK A.E. & TOULOUKIAN Y.S. (1981) - *Thermophysical properties of rocks*. Physical Properties of Rocks and Minerals. Edited by Y.S. Touloukian, W.R.
- PASCULLI A. & SCIARRA N. (2005) - *Numerical modelling of the deeply soil temperature distribution due to climatic changes*. Proceedings of the Annual Conf. of the Int. Ass. for Math. Geol. (IAMG), GIS and Spatial Analysis, **2**: 1267-1273, Toronto, Canada.
- POLLACK H.N. & HUANG S. (2000) - *Climate reconstruction from subsurface temperature*. Annual review of Earth and Planetary Sciences, **28**: 339-365.

Received January 2006 - Accepted December 2006

siderando il rapporto  $\Theta = (\theta_{(x,\tau)} - \bar{\theta}_{surf})/A_1$ , si ricava l'espressione (3).