

SOLUZIONI ANALITICHE PER LA DETERMINAZIONE DELLO SPARTIACQUE PIEZOMETRICO DELLA ZONA DI CATTURA DI UNA BARRIERA DI POZZI

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR MULTIWELL HYDRAULIC BARRIER CAPTURE ZONE DEFINING

LORIS COLOMBO^(*), MARTINO CANTONE^(*), LUCA ALBERTI^(*) & VINCENZO FRANCANI^(*)

^(*) Politecnico di Milano - D.I.I.A.R - Piazza Leonardo da Vinci, 32 - 20133 Milano, Italy. Tel ++39(2)23996664/3
E-mail: loris.colombo@polimi.it, martino.cantone@polimi.it, luca.alberti@polimi.it, vincenzo.francani@polimi.it

RIASSUNTO

Come noto, le barriere di pozzi spesso vengono sottodimensionate, riducendone gravemente l'efficacia. E' opportuno quindi disporre di un metodo speditivo per delineare lo spartiacque piezometrico della zona di cattura anche per geometrie non lineari dei pozzi, in modo da favorire una efficace progettazione di questo importante strumento operativo. Lo studio descrive un metodo analitico - grafico che può essere usato per progettare una barriera le cui dimensioni (in particolare l'ampiezza del fronte di richiamo all'altezza dei pozzi), siano sufficienti per il contenimento dell'inquinante. La funzionalità del metodo grafico è stata validata e supportata confrontando le curve di cattura con un codice numerico esistente, quale Modflow.

PAROLE CHIAVE: barriere idrauliche, punti di stagnazione, fronte di cattura, soluzioni analitiche, modellazione numerica

INTRODUZIONE

La progettazione di una barriera idraulica per il risanamento di un acquifero deve tenere conto di diversi fattori affinché la sua resa sia ottimale, ed esistono a tal proposito delle disposizioni e regolamentazioni ben precise per il monitoraggio e le caratteristiche peculiari di progetto (ad es. BERETTA *et alii*, 1992 e 2003).

JAVANDEL (1986) propose un metodo di ottimizzazione che consisteva nell'intercettazione totale della massa inquinante senza estrarre acqua non contaminata, mediante la disposizione geometrica lineare di più pozzi, dimostrando così che possono esistere non solo delle distanze ottimali fra i pozzi dell'allineamento ma anche che i fronti di cattura aumentano sensibilmente all'aumentare del numero dei pozzi. La modellazione della zona di cattura, definita come l'area situata all'interno dello spartiacque piezometrico che separa il flusso intercettato dalla linea dei pozzi e quello che invece continua a fluire verso valle (SHAN, 1999) dipende non solo dalla geometria ma anche dalla struttura idrogeologica in cui la barriera viene inserita (TUMLISON *et alii*, 2006).

La presente nota vuole, utilizzando un metodo analitico confrontato e supportato da una modellazione numerica, mostrare come, disallineando i pozzi, si abbia una sovrapposizione maggiore dei fronti singoli di ciascun pozzo. A parità di portata Q estratta e a parità del fronte di richiamo, si può ottenere una maggiore copertura con pozzi non allineati

ABSTRACT

As it is well-known, the groundwater wells are often incorrectly located, reducing the hydraulic barrier effectiveness. A quick method for delineating the capture curve also for non co-linear geometry of a wells barrier is thus required. Therefore this paper deals with a non linear location of wells, as a solution of this problem developing an analytical-graphical method to design a barrier whose dimensions (particularly the capture zone width near the wells) are fair sized for the containment of pollution plumes. The suitability of graphical method is validated and supported by a comparison between analytical computed curve capture and numerical one, as solutions reached by Modflow code.

KEY WORD: Analytical solutions, numerical modeling, stagnation points, capture curve

INTRODUCTION

The project of a co-linear extraction wells used to contain subsurface contaminant migration must consider several different variables in order to have an optimal performance. For this purpose, there are some relationships and standard operating procedures to well-define the project characteristics and the monitoring activities (as an example BERETTA *et alii*, 1992, and Beretta *et alii*, 2003).

JAVANDEL (1986) developed an optimization method of the spacing between wells and of discharge rates, using pumping wells placed on a line orthogonal to the regional flow. The Author calculated also the shape of a capture curve, i.e. the line that includes the water flowing into the well (SHAN 1999), that depends not only on the arrangement of wells but also on the hydrogeological structure of the aquifer where the wells are located (TUMLISON *et alii*, 2006).

In this paper it is shown that, using an analytical method compared with a numerical solution, with a non linear position of wells, it can be obtained a greater superposition than a singular wells capture zones as shown by JAVANDEL (1986). With the same pumping rate Q and the same width of the flow cross-section F , it is possible to protect a wider area with non-aligned wells. In general, numerical methods are usually required to handle problems with complex conditions such as heterogeneity, transient flow and a huge number of

lungo una retta rispetto alla disposizione teorica studiata da JAVANDEL (1986). Gli studi eseguiti finora si basano su simulazioni numeriche, che sono molto utili per determinare e studiare sistemi complessi che includono eterogeneità, flusso non stazionario e un numero molto elevato di pozzi (SHAFER, 1987; GORELICK *et alii*, 1993); esse tuttavia sono in grado di delineare la zona di cattura solamente incrementando di continuo il numero delle linee di flusso. Non sempre permettono quindi di calcolare immediatamente e speditivamente né i punti di stagnazione (BEAR, 1979) né le curve di cattura dell'intero sistema di estrazione (SHAN, 1999). Si è ritenuto utile impiegare inizialmente un approccio analitico, in quanto, con condizioni idrogeologiche semplici, è possibile ottenere il calcolo diretto della curva di cattura e dei punti a zero flusso (SHAN, 1999). La funzionalità di tale approccio è sottolineata da CHRIST & GOLTZ, 2002 che applicano al problema le soluzioni derivanti dalla teoria del potenziale complesso, ed è stata ottenuta una formulazione diretta della curva di cattura utile per la progettazione di una barriera idraulica di qualsiasi forma geometrica. Successivamente lo studio ha proposto un confronto tra la soluzione analitica e un modello numerico, mostrando come le due soluzioni convergano con difformità molto contenute.

STUDI PRECEDENTI

L'impiego dei pozzi-barriera trova ampia applicazione per il risanamento degli acquiferi se collegato con impianti di depurazione (di tipo *Pump & treat*). E' quindi spiegabile la ricchezza della letteratura esistente sulle differenti tecniche di calcolo per la delimitazione delle aree di cattura. BEAR (1979) prende in considerazione un acquifero omogeneo ed isotropo per calcolare mediante semplici relazioni per un solo pozzo la distribuzione del carico piezometrico nel caso di pozzo completamente penetrante l'acquifero che preleva le sue acque da una falda uniformemente inclinata. BEAR (1979) ottiene in tal modo la relazione fra portata estratta, trasmissività, gradiente idraulico e funzione che esprime l'andamento dello spartiacque piezometrico della zona di cattura. Una tecnica per delimitare la zona di cattura nel caso di più pozzi allineati di identica portata è stata implementata da JAVANDEL & TSANG (1984). Essi hanno sviluppato soluzioni per pozzi allineati a formare una barriera perpendicolare al flusso di falda, indicando relazioni per individuare la distanza ottimale fra i pozzi. L'esigenza però di conoscere in maniera semplice e rapida la curva di cattura in fase preliminare di progetto ha fatto sì che diversi autori abbiano utilizzato la teoria del potenziale complesso e della sovrapposizione degli effetti: BEAR & JACOBS (1965) hanno studiato il movimento dei soluti nell'acquifero utilizzando il metodo di sovrapposizione degli effetti nel campo complesso, e importanti miglioramenti sono stati apportati da GUADAGNINI & FRANZETTI (1994), con lo sviluppo di un modello analitico-probabilistico di ricostruzione dell'area di cattura di un pozzo che tiene conto delle eterogeneità dell'acquifero e del tempo di trasferimento dei contaminanti. Particolare attenzione è stata dedicata al problema di ricostruzione dell'area di cattura di più pozzi, con un progressivo miglioramento dei risultati. SHAN (1999) ha presentato una soluzione analitica per la zona di cattura limitatamente a due pozzi con geometria non lineare, mostrando l'importanza della posizione dei pozzi. CHRIST & GOLTZ (2002)

wells (SHAFER 1987; GORELICK *et alii*. 1993) but they can estimate the approximation of the capture zone, only increasing number of the stream lines. They cannot compute immediately and directly nor stagnation points neither the capture curve of the extraction system (SHAN 1999); on the other hand by means of an analytical solution, handling problems with simple conditions, it can output explicitly the shape of capture curve and zero-velocity points (SHAN 1999).

The present paper is developed in a complex plane with a complex potential (CHRIST & GOLTZ 2002) providing a directly formulation of the capture curve for any hydraulic arrangement of wells. At the end a comparison between analytical and numerical method are proposed, showing as the two solutions converge with small errors.

PREVIOUS STUDIES

Nowadays, the method of pump-and-treat systems is still one of the most applied technology for groundwater remediation. BEAR (1979) with a very simple relation for a singular well expresses potential and flow rate that could be generated through superposition of inclined aquifers and radial flow toward the wells. For this reason JAVANDEL & TSANG (1986) developed a "type" curves for multiple wells extraction system oriented so that co-linear wells lie perpendicular to regional flow. Then several researchers used complex potential theory applying the superposition of effects. BEAR & JACOBS (1965) studied the movements of particles injected in the aquifer using a superposition complex effect; GUADAGNINI & FRANZETTI (1994) developed a probabilistic-analytical evaluation of the capture zone that takes into account the heterogeneity of the aquifer and the time of transfer of the contaminants. Indeed some relationship demonstrate that probability of capturing solute is associated with each well location in the aquifer. All these studies (e.g. CHRIST 1999; SHAN, 1999) developed several models showing the importance of wells location. CHRIST & GOLTZ (2002) determined an analytical method to capture zones for a non co-linear system, showing that shifting a well down gradient from the co-linear wells position, the stagnation point of the capture curve moves in the same direction. Otherwise, when the well is moved slightly up gradient, the wells capture zone divides vanishing the effectiveness of a remediation containment system.

CHRIST & GOLTZ (2004) proposed a general formulation for a multiple linear wells; also SKVORTSOV & SUYUCHEVA (2004) computed a solution for a injection wells in a straight-parallel natural stream. CHUNHUI LU *et alii*. (2009) showed an analysis of stagnation points for a pumping well in recharging areas, demonstrating that a zero-velocity point is function to a different extraction rate; as the infiltra-

hanno dimostrato analiticamente la flessibilità di un sistema non lineare, dimostrando come spostando un pozzo dalla posizione allineata dei pozzi nella stessa direzione del flusso della falda, i punti di stagnazione della zona di cattura risultano spostati più a valle rispetto una configurazione lineare. Successivamente (CHRIST & GOLTZ, 2004) i medesimi Autori hanno proposto una formulazione generale di risoluzione per N pozzi disposti in maniera lineare e adiacenti. Su questo stesso argomento anche SKVORTSOV & SUYUCHEVA (2004) hanno approfondito alcuni concetti, ad esempio definendo soluzioni per N sorgenti disposte a 180° rispetto il flusso di falda. Infine CHUNHUI LU *et alii*, (2009) hanno presentato un metodo analitico per lo studio dei punti di stagnazione anche in presenza di ricarica, dimostrando come ciascun pozzo abbia diversi punti a zero flusso in funzione della portata estratta; dal momento che l'infiltrazione risulta essere in eccedenza per fornire l'estrazione al pozzo, essa provoca la separazione delle linee di flusso al di fuori della zona di ricarica.

Al fine di proseguire la ricerca impostata da questi Autori, che si propongono di individuare relazioni analitiche utili a definire l'andamento della zona di cattura di più pozzi e la loro disposizione ottimale ai fini di garantire la migliore efficienza della barriera, si è voluto dimostrare come sia possibile raggiungere questo obiettivo sulla base delle seguenti premesse:

- utilizzando il metodo del potenziale complesso, per la sua versatilità e semplicità nel poter ottenere punti di stagnazione e curve di cattura per un sistema a più pozzi (CHRIST & GOLTZ, 2004);
- modellando un numero elevato di pozzi tali da garantire un fronte di cattura esteso, secondo la teoria di JAVANDEL & TSANG (1984). Nel presente lavoro sono state considerate barriere di $N = 5$ pozzi;
- modellando disposizioni non lineari dei pozzi, spostandoli verso la direzione del flusso per avere maggiore sovrapposizione come dimostrato nel lavoro di CHRIST & GOLTZ (2002) e mostrare curve di cattura a maggior favore di sicurezza per il contenimento degli inquinanti;

CALCOLO DEI PUNTI DI STAGNAZIONE E VALIDAZIONE DEI RISULTATI CON IL MODELLO NUMERICO MODFLOW

I punti di stagnazione si formano perché il vettore velocità della falda U viene totalmente annullato dal richiamo della depressione piezometrica k_j ; se avviene che U ha stessa direzione ma verso opposto a J il punto di applicazione P dei vettori agenti è un punto di stagnazione (Fig. 1 in cui si vede il punto di applicazione P). Quando si hanno più pozzi si ha la sovrapposizione delle depressioni piezometriche di ciascun pozzo, che avviene quando si supera la E_{eff} definita in seguito dalla (1.5).

Il vettore J opposto a U è la risultante della somma dei vettori J' e J'' determinati dalla coppia di pozzi adiacenti che interagiscono. Se $J' = J'' = J$, si ha un punto di stagnazione. È facile osservare che avendo una velocità di falda U uniforme le condizioni per cui J' e J'' sono uguali in modulo ma hanno verso opposto rispetto a U si hanno solo lungo l'asse y . Se si indica con α , l'angolo tra il vettore J' ed il vettore J'' , come nella figura 1, si ha che $J' \cos \alpha = 0,5 U$, dove $1/(\ln x')$ $\cos \alpha = 0,5 U$; un valore identico si ha per $J'' \cos \alpha$, e in tal modo

tion is overflowing for well extraction, it causes the separation on flow lines out of the recharge area. The purpose of this paper is to find a fast and simple solution:

- Using a complex potential theory for delineate a capture curve for a multiple well system and for computing of stagnation points (CHRIST & GOLTZ 2004);
- Modeling a greater number of wells for having an extended capture zone, using JAVANDEL & TSANG (1984) theory. In the present work, the analysis is developed with 5 wells;
- Modeling non co-linear wells, moving them down gradient aquifer to have as a result a superposition as showed in CHRIST & GOLTZ (2002): moreover it can be shown that these capture curves assure a more suitable polluted groundwater containment.

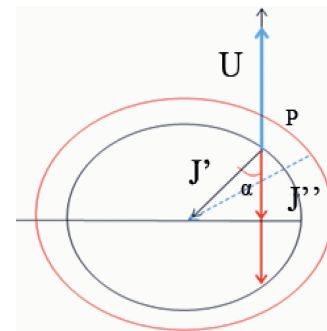


Fig. 1 - Formazione di un punto di stagnazione in una falda inclinata con velocità uniforme U , P è il punto di applicazione dei vettori agenti, J' è il vettore di richiamo al pozzo in funzione, α è l'angolo tra il vettore J' ed il vettore J''

- Formation of a stagnation point in a inclined groundwater with velocity U uniform, P is the application point of vectors, J' is the vectors of the pumping well, α is the angle between J' and J''

COMPUTATION AND VALIDATION OF STAGNATION POINTS WITH ANALYTICAL AND NUMERICAL MODEL

Stagnation points formation is due to the total cancellation of groundwater flow U from the piezometric depression k_j ; if U has the same direction but opposite side to J , the common application point of the vectors is a stagnation point (Fig. 1, where it can be seen the application point P). When there are many wells, a superposition of piezometric depression of each well is possible only when E_{eff} is overtaken (see 1.5)

The vector J opposite to the velocity U is the sum of vectors J' e J'' obtained by twice adjacent interacting wells. If $J' = J'' = J$, a stagnation point is formed. It's easy to observe that if the velocity U is uniform, the conditions, as J' and J'' are similar in modulus but with different direction opposite to U , are only long y axis. If α is the angle between vector J' and J'' , as shown in Fig.1, it can be obtained that $J' \cos \alpha = 0,5 U$ where $1/(\ln x')$ $\cos \alpha = 0,5 U$; a similar value is obtained for $J'' \cos \alpha$ so that the sum gives U with opposite sign. It's normal

Arrangement	a (m)	b (m)	Q (l/s)	Q (l/s)	Q (l/s)	Q (l/s)
1	30	0	2	4	5	7
2	30	5	2	4	5	7
3	30	15	2	4	5	7

Tab. 1 - Parametri di progetto di diverse barriere idrauliche: a è l'interdistanza in metri lungo l'asse x tra i pozzi, b è la coordinata y in metri dei pozzi rispetto l'origine degli assi, Q (l/s) è la portata estratta da ciascun pozzo.
 - Parameters of different hydraulic barriers : a is the distance along x axis between wells in meters, b is the y-coordinate in meters of well, Q (l/s) is the extraction rate of each well

la somma dà il valore di U con segno opposto.

Naturalmente esiste un solo valore di α che sia in grado di soddisfare questi vincoli perché il valore di α è dato da : $\alpha = \arccos 0,5U$. Il valore di α è esattamente l'angolo di input dell'inclinazione del flusso di falda rispetto l'asse x (Tab.1).

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA: IL MODELLO MATEMATICO IMPLEMENTATO

A partire dalle soluzioni presentate da e SHAN (1999), CHRIST & GOLTZ (2004), si è sviluppato un modello che tenesse conto sia di un numero $N \geq 3$, sia di pozzi posizionati in punti qualsiasi del piano complesso (x, y). Per poter utilizzare tali modelli matematici, si devono considerare alcune semplificazioni: l'acquifero è considerato omogeneo, isotropo, confinato e con spessore B uniforme e velocità di Darcy U costante. Il flusso è stazionario. Il potenziale complesso w (JAVANDEL & TSANG, 1984), dal momento che l'equazione di Laplace risulta lineare, può essere espresso come sovrapposizione degli effetti di un sistema formato da N pozzi (di iniezione o di prelevamento) e il flusso di fondo della falda. Si ha quindi

$$w = \phi + i\psi = -Uze^{-i\alpha} + \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2\pi B} \ln(z - z_j) + C \tag{1.1}$$

dove w è il potenziale complesso dell'intero sistema, U [m/s] è la velocità di Darcy costante, α è l'angolo tra la direzione del flusso di falda e l'asse delle x, B [m] è lo spessore dell'acquifero, Q_j [m³/s] è il tasso di estrazione del pozzo se ≥ 0 , N il numero di pozzi considerati, z (z=x+iy) la posizione nel piano complesso dove viene valutato il potenziale w, z_j ($z_j = aj \pm ib_j$) la coordinata del pozzo j nel piano complesso (x, y) in cui a [m] e b [m] sono le coordinate dei pozzi nel piano complesso x,y, $i = \sqrt{-1}$, C è una costante di integrazione che dipende dalle condizioni al contorno.

Il potenziale complesso w può essere diviso in una parte reale ed in una parte immaginaria; la parte reale Φ rappresenta le linee equipotenziali di uguale carico ed è espressa dalla seguente

$$\phi = -U(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{4\pi B} \ln[(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2] \tag{1.2}$$

La parte immaginaria Ψ rappresenta la funzione del flusso,

$$\Psi = U(x \sin \alpha - y \cos \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2\pi B} \tan^{-1} \left(\frac{y - b_j}{x - a_j} \right) \tag{1.3}$$

Per arrivare al calcolo esplicito della curva di cattura, si deve preliminarmente valutare la funzione di flusso al punto di ristagno, corrispondente a velocità nulla. Il punto di ristagno può essere calcolato (CHRIST & GOLTZ, 2002) derivando nel campo complesso il potenziale

that a unique α value is obtained. It's the only value that can satisfy constraint as the fact that α is $\alpha = \arccos 0,5U$. The value is the input angle showed in Table 1, as flow direction.

THE FORMULATION OF PROBLEM: MATHEMATICAL DERIVATION FOR A MULTIPLE WELLS LINEAR BARRIER

From the solution presented by SHAN (1999), CHRIST & GOLTZ (2004), a model considering both a number of wells $N \geq 3$ and a location in any points of complex plane (x, y) has been developed. Any simplifications of the model must be assumed: an homogeneous isotropic confined aquifer, with uniform thickness B and constant Darcy velocity U. Also, a steady state groundwater flow is considered. The complex potential w (JAVANDEL & TSANG, 1984), due to the linearity of Laplace's formula, can be expressed as a superposition of piezometric effects of pumping in several wells (injecting or extracting) and of the uniform flow. The following (1.1) shows that:

where w is the complex potential of the overall system, U [m/s] is the Darcian velocity of uniform regional flow, α [-] is the angle between the regional flow direction and the x-axis, B [m] is the aquifer thickness, Q_j [m³/s] is the extraction rate of well if ≥ 0 , N is the number of wells, z (z=x+iy) is the coordinate in the complex plane where is evaluated the potential w, z_j ($z_j = aj \pm ib_j$), the well coordinate j in the complex plane (x, y) where a [m] e b[m] are the coordinates of the wells in the complex plane, $i = \sqrt{-1}$, C is a constraint.

The complex potential w may be separated into two parts; the real part Φ which represents the constant head lines

Instead, the imaginary part Ψ represents stream function,

In order to calculate the capture curve, the stream function at a stagnation point, where velocity is zero must be evaluated at first. The stagnation point can be computed (CHRIST et alii 2002) deriving of w in respect to z and setting it equal to zero.

w rispetto a z e ponendo l'espressione ottenuta pari a 0.

$$\frac{dw}{dz} = -Ue^{-i\alpha} + \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2\pi B(z - z_j)} \quad (1.4)$$

Le componenti x, y delle radici z_j che soddisfano alla (1.4), rappresentano le coordinate di stagnazione nel piano reale (x_s, y_s). I punti di stagnazione o a zero flusso sono molto importanti per l'analisi delle zone di cattura per le barriere idrauliche e sono il punto di partenza per il calcolo della funzione di cattura della barriera idraulica. L'espressione (1.4) è una funzione di grado N , dove N è il numero di pozzi considerati nello studio. CHRIST & GOLTZ (2002), hanno presentato una equazione per N pozzi disposti sull'asse reale x del piano x, y . Per ciascun pozzo, si ha un punto di stagnazione corrispondente direttamente posto a valle rispetto la provenienza del flusso di falda. La risoluzione con $N \geq 4$ può essere eseguita solamente con metodi numerici come Newton-Raphson (PRESS *et alii*, 1992; CHRIST *et alii*, 1999). Ogni punto di stagnazione dipende dal raggio di influenza fittizio della barriera la cui espressione risulta essere dipendente dalle caratteristiche idrogeologiche dell'acquifero (trasmissività $T [m^2/s]$, gradiente idraulico $j[-]$, spessore $B[m]$, e permeabilità $k[m/s]$,) e dall'ampiezza del fronte di richiamo $E [m]$

$$R_0 = \frac{2E}{Tj} \quad (1.5)$$

La probabile depressione si ha quando i due pozzi adiacenti sovrappongono una parte della depressione efficace in rapporto alla cadente piezometrica. Solamente quando la portata dei pozzi raggiunge un valore per il quale le singole depressioni superano il diametro E_{eff} (e quindi una identica reciproca distanza), vi è possibilità di formazione di una depressione piezometrica che veda sommarsi gli effetti di due pozzi vicini.

Una volta noti i punti di stagnazione, si può sviluppare un'equazione che descriva analiticamente la geometria della curva di cattura. BEAR (1972) definisce la zona di cattura come quella particolare linea di flusso pari ad una costante che passa attraverso il punto di stagnazione.

$$\psi = \psi(x_{j,s}, y_{j,s}) = \psi_{j,s} \quad (1.5a)$$

È possibile così valutare la costante mediante la (1.3) sostituendo (x_s, y_s) per ogni pozzo presente nella barriera. La curva di cattura del pozzo j -esimo può essere rappresentata dalla seguente espressione:

$$\psi_{j,z} = U(x \sin \alpha - y \cos \alpha) + \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2\pi B} \tan^{-1} \left(\frac{y - b_j}{x - a_j} \right) \quad (1.5b)$$

La (1.5b) può essere esplicitamente risolta in y , come funzione di x . Generalmente, però, è opportuno utilizzare il metodo Newton-Raphson per ottenere le coordinate della curva di cattura.

LE DIFFERENTI DISPOSIZIONI SPAZIALI DEI POZZI

Già l'analisi svolta da CHRIST & GOLTZ, (2004) mostra come la posizione dei pozzi abbia un importante e significativo impatto su come contenere l'inquinante. La posizione dei pozzi è determinante per ave-

Le x, y componenti di z_j che soddisfano (1.4), rappresentano le coordinate di stagnazione nel piano reale (x_s, y_s). The stagnation points are very important for the multiple wells capture zone analysis: they are the incoming for computing the function of capture.

The (1.4) is N^{th} order polynomial, where N is the number of wells computed in this work. CHRIST AND GOLTZ (2002) showed an equation for N wells situated on the real x axis of the plane x, y . The solution for $N \geq 4$ can be found using numerical methods such as Newton-Raphson (PRESS *et alii* 1992; CHRIST *et alii* 1999).

Each stagnation point depends on fictitious radius of the barrier which is expressed in function of hydrogeological parameters of the aquifer (transmissivity $T [m^2/s]$, hydraulic gradient $j [-]$, thickness $B [m]$, hydraulic conductivity $k [m/s]$ and $E[m]$ the amplitude of capture curve of the well

The depression cone is formed when two adjacent wells overlap part of effective depression in relation to piezometric gradient. Only when Q rate reaches a value so high that singular depressions overcome the E_{eff} diameter (and so, a same mutual distance) there is a possibility that a piezometric depression sum of two adjacent wells is formed.

When the stagnation points are computed in function of R_0 , an equation that describes analytically the geometry of curve can be developed. BEAR (1972) defined capture zone as that particular streamline which passes through one stagnation point.

So it is possible to evaluate the constant value with (1.3) replacing (x_s, y_s) for each well situated in the multiple line. The capture curve of the j -th well; therefore it is proposed this solution of the problem of defining the capture curve:

The previous (1.5b) can be solved in y as function of x . Generally, the Newton-Raphson method to compute the coordinates of capture zone gives the better solutions. Knowing the value of one coordinate, usually x , the second one can be obtained by means of (1.5).

DIFFERENT SPATIAL ARRANGEMENT OF WELLS

The work developed by CHRIST & GOLTZ (2004) shows as the location of wells has an important impact on containment of pollution plume. The arrangement of wells is crucial to have a better superposition and

re una sovrapposizione migliore degli effetti e avere quindi un fronte di cattura ampio tale da poter contenere interamente l'eventuale deflusso.

I parametri di progetto della barriera sono stati fatti variare per ottenere la conformazione geometrica migliore; sia le distanze tra pozzi lungo le ascisse x e le ordinate y , sia le portate dei pozzi sono state variate, ottenendo così differenti geometrie dello spartiacque piezometrico che sono stati confrontati poi con il modello numerico Modflow. Nella tabella 1 seguente sono elencate le diverse geometrie assunte nello studio e le diverse portate di progetto.

have a capture zone necessary to contain the contaminant plume in situ.

In order to demonstrate this statement, the parameters of wells system model have been varied to obtain the best geometrical position of wells.

The distance between wells along x and y and the extraction rates have been changed to compute different simulation. The output has been compared with the results of a numerical model as Modflow. In table 1, the different geometries analyzed in this paper and different extraction rate are shown.

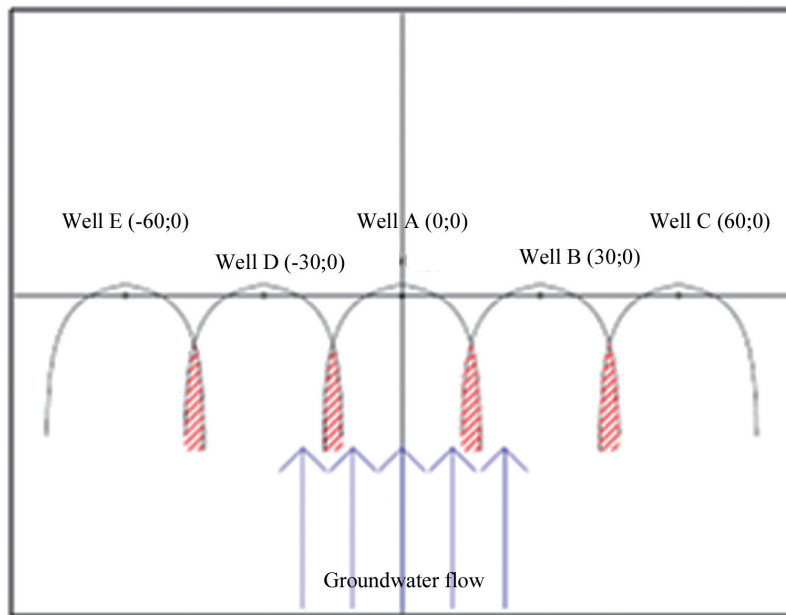


Fig. 2 - Configurazione 1: pozzi barriera disposti linearmente lungo l'asse delle x e rispettivi fronti di richiamo (BEAR, 1979); [A (0,0); B (30,0); C (60,0); D (-30,0); E (-60,0)]
- Arrangement 1: a barrier wells located in a co-linear situation and drawing of fronts (BEAR, 1979) with $a=30$ m and $b=0$ m; [A (0,0); B (30,0); C (60,0); D (-30,0); E (-60,0)]

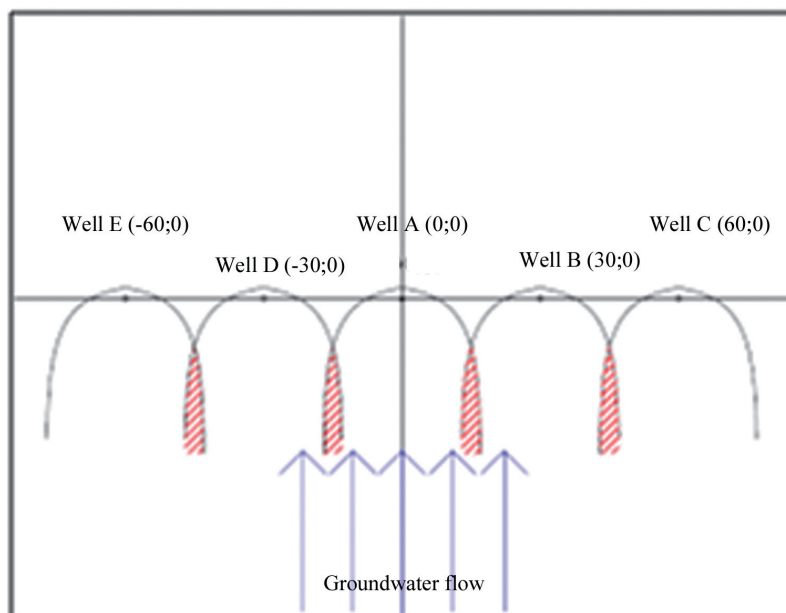
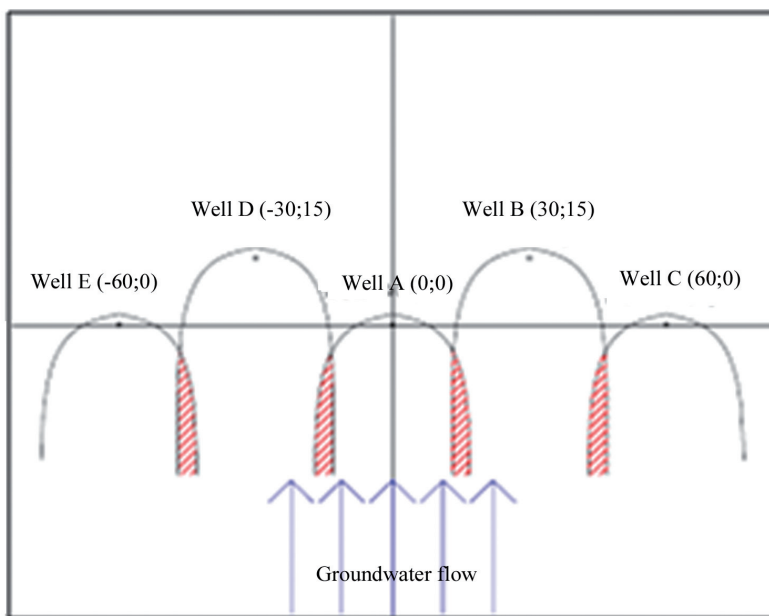


Fig. 3 - Configurazione 2: pozzi barriera disposti a "M" e rispettivi fronti di richiamo. Le zone tratteggiate indicano una lieve sovrapposizione dei fronti (BEAR, 1979); [A (0,0); B (30,5); C (60,0); D (-30,5); E (-60,0)]
- Arrangement 2: a barrier wells located in a "M" non co-linear situation and drawing of fronts. Small superposition of groundwater divide (BEAR, 1979) with $a=30$ m and $b=5$ m; [A (0,0); B (30,5); C (60,0); D (-30,5); E (-60,0)]

Fig. 4 - Configurazione 3: pozzi barriera disposti a “M” e rispettivi fronti di richiamo. Le zone tratteggiate indicano una sovrapposizione dei fronti (BEAR, 1979); [A (0,0); B (30,15); C (60,0); D (-30,15); E (-60,0)] - Arrangement 3: a barrier wells located a “M” non co-linear situation and drawing of fronts. Superposition of effects (BEAR, 1979) with a =30 m and b=15 m; [A (0,0); B (30,15); C (60,0); D (-30,15); E (-60,0)]



Hydraulic gradient j [-]	0.002
Aquifer hydraulic conductivity K [m/s]	0.005
Porosity n [-]	0.2
Darcy velocity U [m/s]	10^{-5}
Thickness B [m]	40
Flow direction α [rad]	1.57

Tab. 3 - Valori del raggio di influenza della barriera $R_0 = 5Q/(2\pi UB)$ (m); esso risulta essere 5 volte il raggio di influenza di un singolo pozzo a parità di portata Q
 - Values of fictitious radius $R_0 = 5Q/(2\pi UB)$ (m); it is 5 times greater than one of singular well with the same rate Q

I parametri che riguardano l’assetto idrogeologico della falda oggetto dello studio sono supposti invece costanti ed il regime stazionario. Si veda a tal proposito la Tabella 2.

CALCOLO CON METODO ANALITICO

Utilizzando i parametri geometrici e idrogeologici (Tab. 2), si possono ottenere diversi raggi di influenza della barriera (Tab. 3).

Dividendo per U (velocità di Darcy) la formula (1.4) per introdurre il raggio di influenza R_0 [m] nel calcolo dei punti di stagnazione si ottiene l’espressione seguente, avendo introdotto opportunamente le coordinate dei singoli pozzi appartenenti alla barriera (a,b)

$$ze^{-i\alpha} + R_0 [\ln(z_A) + \ln(z_B - a - ib) + \ln(z_C - 2a) + \ln(z_D + a - ib) + \ln(z_E + 2a)] = 0 \tag{1.6}$$

Tab. 2 - Parametri dell’acquifero studiato (K [m/s] è la permeabilità dell’acquifero, U [m/s] è la velocità di Darcy, B [m] è lo spessore dell’acquifero confinato, α [-] è la direzione del flusso rispetto l’asse reale x , J [-] è il gradiente idraulico della falda inclinata, n (-) è la porosità
 - Parameters of the aquifer (K [m/s] is the conductivity, U [m/s] is the Darcy velocity, B [m] is the thickness of aquifer, α [-] is angle of flow direction respect to x-axis, J [-] is the gradient of inclined groundwater, n (-) is the porosity

R_0 (m)	Q (l/s)
3.98	2
7.96	4
9.95	5
13.93	7

The aquifer hydrogeological parameters are considered constant during all elaborations, and the flow is always at steady-state. The table 2 shows the input values for computing both stagnation points and capture curve.

ANALYTICAL MODEL COMPUTATION

Using the geometric parameters and values listed in Table 2, the different fictitious radii can be computed-(Tab. 3).

Dividing by Darcy velocity U the (1.4) and introducing the fictitious radius R_0 [m] for the compute of the stagnation points, the potential function of geometry of co-linear wells can be obtained as follow:

Si ottiene dopo numerosi passaggi, la forma compatta dell'equazione a zero flusso, le cui radici complesse z_j rappresentano le coordinate dei punti di stagnazione per ciascun pozzo della barriera.

Come si vede, è un'equazione di grado $N=5$,

$$i \sin \alpha z^5 + \beta z^4 - \gamma z^3 - \delta z^2 + \varepsilon z + \epsilon = 0 \quad (1.7)$$

i cui coefficienti complessi sono:

$$\beta = 2b \sin \alpha + 5R_0, \gamma = b^2 \sin \alpha + 5a^2 \sin \alpha + 8R_0b, \delta = 15a^2R_0 + 3b^2R_0 + 8a^2b \sin \alpha, \varepsilon = 16a^2bR_0 + 4a^4 \sin \alpha + 4a^2b^2 \sin \alpha, \epsilon = 4a^4R_0 + 4a^2b^2R_0$$

Tali valori sono dipendenti dalla geometria della barriera (posizione a,b di ogni singolo pozzo), dall'angolo del flusso di falda α e dal raggio di influenza R_0 [m].

CONFIGURAZIONE 1: BARRIERA RETTILINEA PER DIVERSE PORTATE DI EMUNGIMENTO

La figura 2 mostra la disposizione dei pozzi della barriera oggetto di studio. Il flusso risulta diretto lungo l'asse y verso la sua direzione positiva ed i pozzi risultano equidistanziati di 30 m (Tab. 1). In questa configurazione lineare, i coefficienti complessi precedentemente definiti diventano:

$$\beta = +5R_0, \gamma = +5a^2 \sin \alpha, \delta = 15a^2R_0, \varepsilon = +4a^4 \sin \alpha, \epsilon = 4a^4R_0$$

L'algoritmo implementato in Matlab permette di

- calcolare i coefficienti complessi noti i parametri geometrici e idrogeologici di interesse (Tab. 1-2);
- ottenere i valori dei punti di stagnazione in funzione della R_0 [m] implementando la formula (1.7) (Tab. 4);
- ottenere i valori della funzione della curva di cattura (1.5b) da interpolare;

La Tabella 4 mostra i punti di stagnazione calcolati per due diverse portate unitarie $Q = 2$ [l/s] e $Q = 7$ [l/s] come mostrate in Tab. 3.

The zero-flow equation can be obtained. The z_j complex roots that reset the (1.7) are the stagnation points of each well. The (1.7) is a N^{th} roots = 5 polynomial

The complex coefficients are:

These values depends on geometry of wells location, groundwater flow direction and fictitious radius R_0 [m].

ARRANGEMENT 1: CO-LINEAR WELLS FOR DIFFERENT EXTRACTION RATE Q

Figure 2 shows the arrangement of the wells studied in this section. The flow is directed along positive y axis and the distance between wells is 30 meters (Table 1).

The implemented algorithm in Matlab software allows to

- obtaining the values of stagnation points in function of R_0 [m] (Table 4)
- compute the complex coefficients knowing hydrogeological and geometrics parameters (Table 1-2)
- obtaining the capture zone coordinates computing (1.5b)

Table 4 shows stagnation points with different flow rates $Q = 2$ [l/s] e $Q = 7$ [l/s] as shown in Tab. 3.

STAGNATION POINTS					
$R_0 = 3.98$ [m], $Q = 2$ [l/s]	X (m)	Y (m)	$R_0 = 13.93$ [m], $Q = 7$ [l/s]	X (m)	Y (m)
Well A	0	4.15	Well A	0	40.78
Well B	29.51	4.08	Well B	18.15	8.77
Well C	58.92	3.76	Well C	51.85	5.63
Well D	-29.51	4.08	Well D	-18.15	8.77
Well E	-58.92	3.76	Well E	-51.85	5.63

ARRANGEMENT 2-3: "M" NON CO-LINEAR WELL FOR DIFFERENT EXTRACTION RATE Q

Tab. 4 - Punti di stagnazione in funzione della variazione di R_0 [m] per una barriera lineare
- Stagnation points function to variation of R_0 [m] for a co-linear barrier

CONFIGURAZIONE 2-3: BARRIERA A "M" PER DIVERSE PORTATE DI EMUNGIMENTO

Si è voluto studiare quale possa essere il miglioramento di cattura di una barriera, spostando i due pozzi B e D lungo l'asse delle y, prima di soli 5 m (configurazione 2) poi di 15 m. Il calcolo dei punti

ARRANGEMENT 2-3: "M" NON CO-LINEAR WELL FOR DIFFERENT EXTRACTION RATE Q

A different well location, moving B and D wells respectively along y-axis, at first about 5 meters (arrangement 2), at last about 15 meters, is studied for improving the pump-and-treat system

di stagnazione avviene nello stesso modo visto precedentemente, ma apportando piccole modifiche ai parametri moltiplicativi della funzione complessa in z. Il sistema di equazioni (1.6-1.7) viene riscritto con differenti coefficienti della (1.7) che dipendono in questo caso anche dalle coordinate b dei pozzi posti lungo l'asse immaginario y (si veda le Fig. 3-4), ed hanno l'espressione generale riportata nella (1.7):

Si sono calcolati così i punti di stagnazione anche per le due configurazioni geometriche complesse, sempre in funzione di $R_0 [m]$ dalla Tab. 3; i valori sono riportati nelle Tab. 5 e Tab. 6:

zone capture. The computation of stagnation points takes place in the same way presented in the previous section, making some small changes to the complex multipliers parameters in z function. The (1.6-1.7) is rewritten with different coefficients that also depends on b coordinate of wells moved along the positive y-axis (see Figure 3-4). The parameters have general expression seen in (1.7).

The stagnation points are computed also for the complex geometric arrangement, depending on $R_0 [m]$ from Tab. 3; the values are carried over the Tab. 5 and Tab. 6:

STAGNATION POINTS					
$R_0 = 3.98 [m], Q = 2 [l/s]$	X (m)	Y (m)	$R_0 = 13.93 [m], Q = 7 [l/s]$	X (m)	Y (m)
Well A	0	3.96	Well A	0	42.39
Well B	29.46	9.26	Well B	15.01	12.75
Well C	58.96	3.67	Well C	52.75	5.85
Well D	-29.46	9.26	Well D	-15.01	12.75
Well E	-58.96	3.67	Well E	-52.75	5.85

Tab. 5 - Punti di stagnazione in funzione della variazione di $R_0 [m]$, b = 5 m per una barriera a "M"
 - Stagnation points function to variation of $R_0 [m]$ for a "M" barrier with b = 5 meters

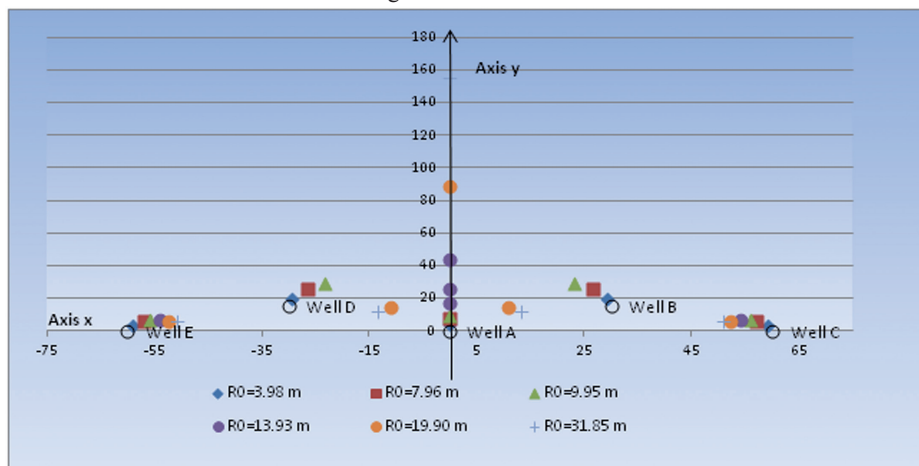
STAGNATION POINTS					
$R_0 = 3.98 [m], Q = 2 [l/s]$	X (m)	Y (m)	$R_0 = 13.93 [m], Q = 7 [l/s]$	X (m)	Y (m)
Well A	0	3.67	Well A	0	43.98
Well B	29.42	19.51	Well B	0	25.32
Well C	59.10	3.56	Well C	54.03	6.56
Well D	-29.42	19.51	Well D	0	17.05
Well E	-59.10	3.56	Well E	-54.03	6.56

Tab. 6 - Punti di stagnazione in funzione della variazione di $R_0 [m]$, b = 15 m per una barriera a "M"
 - Stagnation points function to variation of $R_0 [m]$ for a "M" barrier with b = 15 meters

La figura 5 mostra i punti di stagnazione al variare del raggio R_0 .

The figure 5 shows the stagnation points behavior increasing flow rate in arrangement 3.

Fig. 5 - Andamento dei punti di stagnazione al variare del raggio di influenza $R_0 [m]$ (Tab.6) per una barriera a "M" con b = 15 m
 - Behavior of stagnation points with different rate flow $R_0 [m]$ (Tab. 6) for a "M" barrier with b = 15 m



Appare evidente che in questa situazione si vengono a sovrapporre le depressioni piezometriche dei tre pozzi centrali aumentando la portata e quindi il raggio R_0 , in una ristretta area intorno all'asse y. Il punto di stagnazione si colloca lungo l'asse y come in figura 5. Con l'aumentare dell'entità delle portate dei tre pozzi, questo punto si sposta sempre più a valle della barriera, in quanto si amplia gradualmente l'area di sovrapposizione delle depressioni dei tre pozzi. La sovrapposizione delle depressioni del pozzo centrale (pozzo A) e di quello laterale (pozzo B) genera un punto di stagnazione secondario, come accade per i pozzi A e D e per il pozzo B,C da un lato e D,E dall'altro. Si ha quindi un punto di stagnazione principale lungo l'asse y, dovuto alla sovrapposizione dei tre pozzi centrali e quattro punti secondari dovute alle coppie di pozzi adiacenti.

L'aumentare delle portate porta a una depressione piezometrica unica, somma di quelle di tutti e cinque i pozzi.

CONFRONTO CON UN MODELLO NUMERICO

Per validare la formula analitica e i risultati ottenuti mediante l'algoritmo implementato in Matlab, occorre validare le soluzioni rese dal modello analitico mediante un modello numerico, Modflow, sviluppato dall'U.S.G.S. (McDONALD, HARBAUGH, 1988). Il modello è stato discretizzato con una griglia le cui righe (204) e le colonne (363) sono distanziate tra loro da 100 metri a 1 metro, nella zona dove è collocata la barriera di pozzi (come mostrato in Fig. 6).

Le condizioni al contorno per ottenere lo stesso gradiente idraulico descritto nella Tabella 2 sono quelle di carico costante (122 m s.l.m. a sud e 112.2 m s.l.m. a nord). Il modello prevede un solo layer (quota bottom 30 m s.l.m., quota top 100 m s.l.m.), e i pozzi sono stati inseriti come "Analytical element". I parametri idrogeologici usati in Matlab sono stati replicati in Modflow (Tab. 2), con lo scopo di effettuare un confronto tra i risultati dei due modelli e calcolare l'errore percentuale nello spazio x, y.

Anche in Modflow come nella formula analitica, il punto di stagnazione corrispondente al pozzo centrale A si allontana rapidamente dall'origine degli assi lungo l'asse y all'aumentare del parametro R_0 [m]. E' stato riscontrato che le differenze percentuali tra i modelli sono intorno al 3-4 % e gli errori maggiori si osservano sulle coordinate delle ascisse piuttosto che in quelle delle ordinate. Il modello analitico permette quindi di trovare in maniera precisa e speditiva i valori delle coordinate dei punti di stagnazione.

ERROR			
Difference x (-)	$\Delta X(m)$	$\Delta Y(m)$	Difference y (-)
0.04%	1.01	-0.04	0.00%
0.05%	1.11	0.20	0.01%
0.05%	1.11	0.49	0.02%
0.04%	0.94	-0.14	-0.01%
0.02%	0.48	0.00	0.00%

Tab. 7 - Errori percentuali tra le coordinate dei punti di stagnazione per $R_0 = 3.98 [m]$ in una barriera piana
 - Percentage errors in coordinates of stagnation points between analytical and numerical model for $R_0 = 3.98 m$ in a co-linear barrier

It can be observed that, increasing flow rate Q, near the axis y the superposition of piezometric depression of three central wells occurs. The stagnation point is located along y-axis as shown in Fig. 5. Increasing the rate Q, this point moves downstream barrier, as a consequence of the widening of the superposition area of three central wells. The superposition of central well (A) and of lateral one (B) depression, produces a secondary stagnation point, as it is observed for well A-D and B-C from one side and on the other side, wells D-E. A main stagnation point is engendered on y-axis due to superposition of three central wells depression and also 4 secondary stagnation points are caused by pairs of external wells.

Increasing flow rate, a unique piezometric depression is formed as the sum of all wells superposition near the y-axis.

VALIDATION WITH A NUMERICAL MODEL

To evaluate both the analytical formulation and the results obtained with the Matlab algorithm, it is necessary, at first, to evaluate the analytical solutions with a numerical model as Modflow developed by U.S.G.S (McDONALD MG, HARBAUGH AW, 1988). The model is implemented with grid whose column (363) and row (204) spacing are from 100 meters to 1 meter in the well barrier area (as in Fig. 6).

The boundary conditions, representing the same gradient as showed in Table 3, are constant head (122 m a.s.l. South and 112.2 m a.s.l. on the North side). The model has only one layer (bottom -30 m a.s.l., top 10 m a.s.l.) and the wells are inserted as "Analytical element". The hydrological parameters used in Matlab are implemented in Modflow software (Table 3). The purpose is to make a comparison between the models results and compute a percentage error in the x, y space.

Both in Modflow software and in analytical formula, the stagnation point nearby the central well A becomes more and more far away from the origin increasing the flow rate or the parameter R_0 [m].

It can be seen that percentage errors between models are about 3-4 % and errors on the x-axis are higher than ones in y-axis. The percentage errors are similar also in other arrangements with all the flow rate tested. Instead, the analytical model allows to find in a precise and fast way the coordinates values of stagnation points.

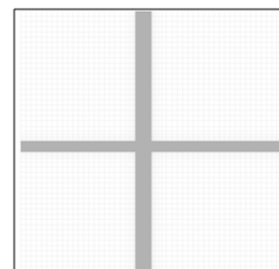


Fig. 6 - Griglia di discretizzazione del modello numerico. Le celle si rimpiccioliscono notevolmente nei pressi della barriera idraulica
 - Grid implemented in the numerical model. The cell are more and more thicken nearby the well barrier.

CALCOLO DELLO SPARTIACQUE PIEZOMETRICO E VALIDAZIONE DEI RISULTATI CON UN MODELLO NUMERICO

La forma della curva di cattura dipende dalla sovrapposizione più o meno ottimale dei fronti di ogni singolo pozzo appartenente alla barriera idraulica (Fig. 2-3-4). Più le curve di ogni singolo pozzo si sovrappongono e più l'effetto della barriera andrà ad interessare una porzione di acquifero più estesa richiamando così quanto più inquinante possibile. Per capire meglio come ciò sia possibile, è stata eseguita in questo lavoro un'analisi su come la sovrapposizione degli effetti sia maggiore per pozzi che non siano disposti sulla stessa linea orizzontale. La formula analitica permette, dopo numerosi calcoli, di avere una curva approssimativa della cattura di un sistema di contenimento idraulico. A partire dalla 1.3, con successive elaborazioni matematiche si ottiene:

$$y^5 + Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0 \quad (1.8)$$

dove / where

$$A = 2b - 5x \tan\left(\frac{\psi_{j,s}}{R_0 U} - \frac{x}{R_0}\right)$$

$$B = -10x^2 + 5a^2 + b^2 - 8bx \tan\left(\frac{\psi_{j,s}}{R_0 U} - \frac{x}{R_0}\right)$$

$$C = -16bx^2 + 8a^2b + 10x^3 \tan\left(\frac{\psi_{j,s}}{R_0 U} - \frac{x}{R_0}\right) - 15a^2x \tan\left(\frac{\psi_{j,s}}{R_0 U} - \frac{x}{R_0}\right)$$

$$D = 5x^4 - 15a^2x^2 - 3x^2b^2 + 4a^4 + 4a^2b^2 + 8bx^3 \tan\left(\frac{\psi_{j,s}}{R_0 U} - \frac{x}{R_0}\right) - 16a^2xb \tan\left(\frac{\psi_{j,s}}{R_0 U} - \frac{x}{R_0}\right)$$

$$E = -2bx^4 + 8a^2bx^2 + 4a^4R_0 + 4a^2b^2R_0 + \tan\left(\frac{\psi_{j,s}}{R_0 U} - \frac{x}{R_0}\right) \left(x^5 - 5a^2x^3 - b^2x^3 + 4a^4x + 4a^2b^2x\right)$$

sono sottofunzioni valide sia per barriere lineari ($b = 0$) sia per barriere disposte con geometrie differenti ($b \neq 0$) e dipendono dalla costante $\psi_{j,s}$. Quest'ultima può essere agevolmente calcolata per mezzo della (1.5), sostituendovi i punti di stagnazione calcolati per ciascun caso da studiare.

A partire dalla (1.8), per ogni valore di x appartenente all'asse reale, partendo dal valore di ciascun punto di stagnazione, è possibile ricavare i valori di y come appartenenti all'equazione della curva di cattura (1.8). Ogni input produce 5 differenti valori di y , dei quali solo uno è ritenuto essere valido ed accettabile. Questo calcolo è stato fatto per la barriera sia lineare che quella di forma geometrica complessa per vedere se in effetti il fronte di cattura cambia con la posizione dei pozzi avanzati rispetto l'orizzontale. Inoltre è stato possibile confrontare i valori ottenuti con il modello analitico con quelli invece ottenuti con Modflow.

Vengono riportate le tre differenti configurazioni (Fig. 7 - Fig. 8 - Fig. 9), con la medesima portata di estrazione (sono rappresentate le curve con la portata estrattiva massima) e si possono osservare così i diversi benefici che si hanno nell'avere la barriera disposta con una geometria ad "M".

CONFIGURAZIONE 1: FRONTE DI CATTURA PER UNA BARRIERA RETTILINEA

La formula (1.8) permette di delineare la curva di cattura della barriera rettilinea, come mostrato nella seguente Figura 7.

COMPUTATION OF CAPTURE CURVE AND RESULTS COMPARISON WITH A NUMERICAL MODEL

The geometry of capture curves depends of the superposition of fronts of each well belonging to hydraulic system (Figure 2-3-4). The more the curves of each well are overlapped, the more the pump-and-treat system effect can involve a large part of aquifer downstream the barrier, intercepting the most particles of pollution plume. For a better comprehension of this problem, in this section a study about how the superposition increases for wells that are in a non co-linear arrangement is explained.

The analytical expression allows to have an approximate capture curve for a hydraulic barrier. From 1.3, with some mathematical elaboration can be obtained

are simplified functions useful both for linear ($b = 0$) and non-linear barrier with a different geometry ($b \neq 0$). They depend on $\psi_{j,s}$ constant value, which can be computed through (1.5) replacing computed stagnation points for each studying case.

From (1.8) for each x -value of real axis, for each stagnation point, it is possible to derive y -values that are on the capture curve. The Matlab solution has been developed: every x -input produces 5 different y -values which only one can be considered valid and acceptable. The purpose has been about highlighting different effects on groundwater watershed changing wells position in a non co-linear configuration. Further the analytical values have been compared to Modflow ones. The three different configurations are presented here with the same flow rate and different benefits can be seen with "M" respect to a linear one.

ARRANGEMENT 1: CO-LINEAR CAPTURE CURVE

The (1.8) allows to trace the co-linear wells arrangement capture curve as shown in the figure 7.

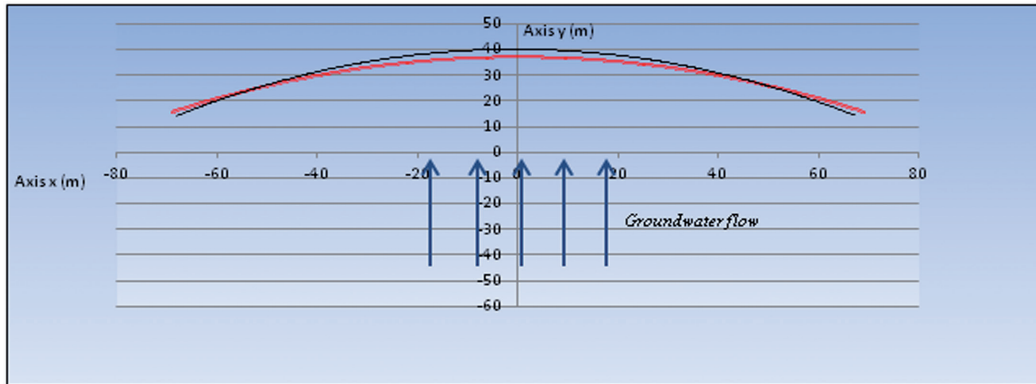


Fig. 7 - Confronto fronte di cattura analitico (in nero) con fronte di cattura numerico (in rosso)
 - Comparison analytical (black) and numerical (red) capture curve

Una configurazione lineare di pozzi consente di catturare inquinante in una zona più larga di 120 metri, con un raggio fittizio approssimativamente di 40 metri. Nella zona centrale tra il pozzo B e il pozzo D, a causa del fatto che le coordinate del pozzo A sono (0,0), il valore costante Ψ risulta divergente, alterando il calcolo della coordinata y. Il risultato per la zona di cattura ottenuta con il software Modflow è stata comparata con la soluzione analitica: la zona di cattura disegnata in rosso (Fig. 7) è la soluzione migliore ottenuta dal modello analitico quando il valore costante Ψ tende a zero.

La figura 7 mostra che le due zone di cattura, quella ottenuta dal modello analitico e quella ottenuta dal modello numerico, sono simili tra loro e possono essere confrontate. A questo scopo, sono stati calcolati gli errori tra i due modelli, ottenendo un valore intorno a 0.50%, corrispondente alla zona più critica ($-30 < x < 30$).

CONFIGURAZIONE 2-3: FRONTE DI CATTURA BARRIERA A “M”

Spostando i pozzi B e D a valle, si sono volute rappresentare le curve di cattura vedendo come la copertura del fronte sia maggiore con l’avanzamento di questi ultimi rispetto la disposizione lineare della barriera.

Il confronto con Modflow mostra come anche in questo caso la curva di cattura ottenuta con il metodo analitico abbia errori solo in corrispondenza del pozzo centrale in cui gli errori arrivano però non oltre allo 0,5%. La formula (1.8) permette quindi di ottenere con buona approssimazione, in maniera speditiva e preliminare il fronte di cattura di una barriera idraulica con geometria complessa; la possibilità di avere una soluzione analitica speditiva e più veloce di una numerica permette di ottenere in via preliminare informazioni su dove poter posizionare correttamente eventuali punti di controllo a valle della barriera stessa.

Anche in queste configurazioni gli errori percentuali tra il modello numerico e il modello analitico sono maggiori vicino all’origine del sistema di riferimento, e comunque non superano lo 0.60%. Un confronto tra le tre curve di catture per le tre differenti configurazioni è mostrato nella Fig.8.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI

La conoscenza dei fronti di cattura permette di valutare preliminarmente in fase di progettazione di una barriera idraulica dove ubicare correttamente a valle eventuali punti di controllo per il monitoraggio

A linear arrangement of wells allows to capture polluted particles with a zone larger than 120 meters and with an about 40 meters fictitious radius. In the central interval between B and D wells, from the fact that the A well coordinates are (0,0) the Ψ constant value results divergent, causing a bad solution in computation of y-coordinate. The result for the capture zone computed with Modflow numerical code has been compared with the analytical solution; the red capture zone generated by numerical modeling (Figure 7) is the more satisfying in the stretch where constant Ψ tends to zero-value.

Figure 7 shows that the two capture zones are similar and they can be compared to. For this purpose, the errors between the two model have been calculated, obtaining a value about 0.50% corresponding to the most critical zone ($-30 < x < 30$).

ARRANGEMENT 2-3: “M” CAPTURE CURVE

Moving B and D wells downstream, the results for a non co-linear barrier have been plotted, showing the positive effects on the width of zone.

The comparison with Modflow shows that, also in this particular case the capture zone computed with the analytical method has the errors nearby the central well where the percentage value is, however, less than 0,5%. The (1.8) allows to have a good approximation, in a quick calculation of the capture curve with complex geometry; the possibility to have an analytical solution faster than a numerical one allows to obtain in a preliminary way some information about where locate correctly some monitoring point downstream the barrier-

Also in these arrangements percentage errors between two analytical and numerical models are greater nearby the origin of reference system and they don’t exceed 0.60%. A comparison of three capture curve for three different arrangements is shown in next figure (8).

DISCUSSION OF RESULTS

The knowledge of the capture curve allows to evaluate preliminary in the planning stage of an hydraulic barrier where the monitoring points can be correctly located, and to avoid some disservice:

Fig. 8 - Confronto fronte di cattura analitico nelle tre differenti configurazioni con $Q = 7$ [l/s]. Il fronte maggiore è quello con i pozzi disposti secondo la configurazione 3
 - Comparison of capture analytical curve in three different arrangements with $Q = 7$ [l/s]: the higher capture is obtained with arrangement 3

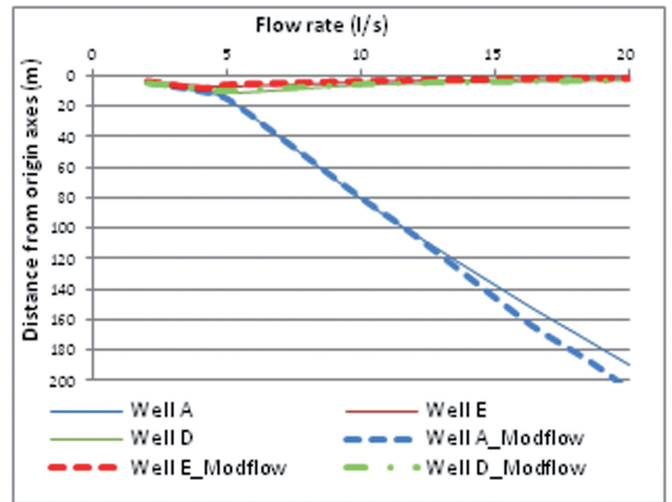
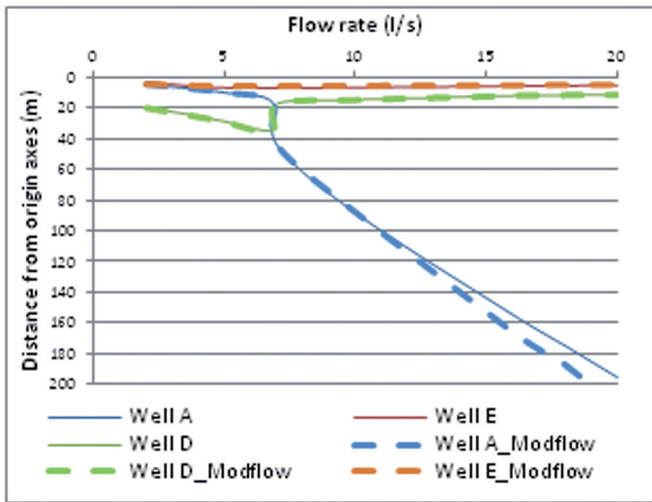
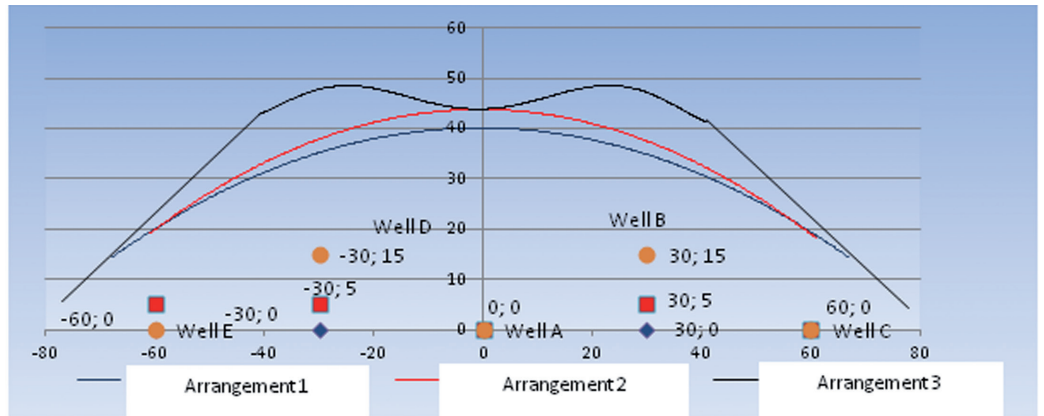


Fig. 9 - Differenti andamenti dei punti di stagnazione in un grafico Q/Y; sulla sinistra l'andamento per la configurazione 1, sulla destra per la configurazione 3
 - Different trends in a Q/y-stagnation plotting: the first one is for arrangement 1 the second for the 3

degli inquinanti, evitando quindi possibili malfunzionamenti: ad esempio nella progettazione della barriera si deve prestare attenzione se la curva di cattura è troppo estesa a valle, intercettando corpi idrici superficiali o depressioni di altri pozzi piezometrici. L'allargamento del fronte però, può essere utile quando si vuole includere nella zona di cattura alcuni punti di forte inquinamento ubicati a valle della barriera stessa.

In questo caso, è possibile analizzare il comportamento dei punti di stagnazione in funzione della portata (Fig. 9).

La figura 9 permette di osservare meglio il diverso comportamento nelle due configurazioni 1 e 3 (Tab. 1); mentre nella prima configurazione (Fig. 2) il comportamento è approssimativamente lineare, nella seconda configurazione (Fig. 4) è possibile riconoscere due andamenti: il primo lineare dove la coordinata del pozzo centrale A è minore di quella dei pozzi B e C (in questa configurazione, l'inquinante è catturato unicamente dal pozzo centrale a monte), il secondo parabolico dove la coordinata y del pozzo A cresce (l'inquinante viene catturato non solo da monte, ma anche da valle della barriera). Il modello anali-

e.g. in barrier design it must pay attention if the capture curve is too large downstream, including superficial water bodies, or piezometric depressions of other wells. On the other hand, the widening can be required when it needs to include in capture zone some hot spots of contaminants lying downstream. In this way, it can see the behavior of the stagnation points in function to the flow rate (Fig. 9).

The figure 9 shows better the different behavior in 1-3 arrangements (see Tab. 1): while in the first arrangement (Fig. 2), the behavior is quite linear, in the second one (Fig. 4) there are two trends: the first linear where the y-coordinate of central well A is lower than B and C (in this situation the particles are captured by the central well only upstream) and the second parabolic where y-coordinate of well A becomes greater and greater (the particles are captured not only upstream but also downstream). So, the analytical model is a preliminary method about how locate the hydraulic wells system for capture and treat contaminated water defending critical areas with same hydrogeological parameters of numerical model In the previous figure

tico, con gli stessi parametri idrogeologici usati nel modello numerico, risulta quindi un metodo speditivo per il giusto posizionamento del sistema idraulico per la cattura dell'acqua contaminata e per la difesa di aree critiche. Nella precedente figura 9, si può vedere che la coordinata y del punto di stagnazione del pozzo centrale sia per la disposizione 1 che per la 3, cresce sempre più aumentando la portata.

Il passaggio dal primo al secondo comportamento rappresentato nella Fig. 9 e mostrato in Fig. 10 si ha quando la coordinata y del pozzo A diventa maggiore rispetto alla coordinata y del punto D. In questo caso, collocando una serie di punti di monitoraggio a valle della barriera, è possibile riscontrare dei valori di concentrazione di inquinante non reali, a causa del richiamo dei pozzi dalla direzione di valle.

9 it can see that the y-coordinate of the stagnation point of the central well both in arrangement 1 and in arrangement 3 becomes greater increasing the flow rate.

The changeover from the first behavior to second one represented in Fig.9 and shown in Fig. 10, is where the y-coordinate of well A, becomes greater than those of well D.

If $R_0 [m]$ values overcome about 13.50 m (about 7 l/s per well in proposed arrangement), an higher values of the coordinate of central stagnation point becomes so far away the barrier that the pollutants particle come back upstream to the central well as shown in figure 11. As said previously, this is an advantage for capturing if there are not boundary as water bodies or other depression. As it can be seen in the

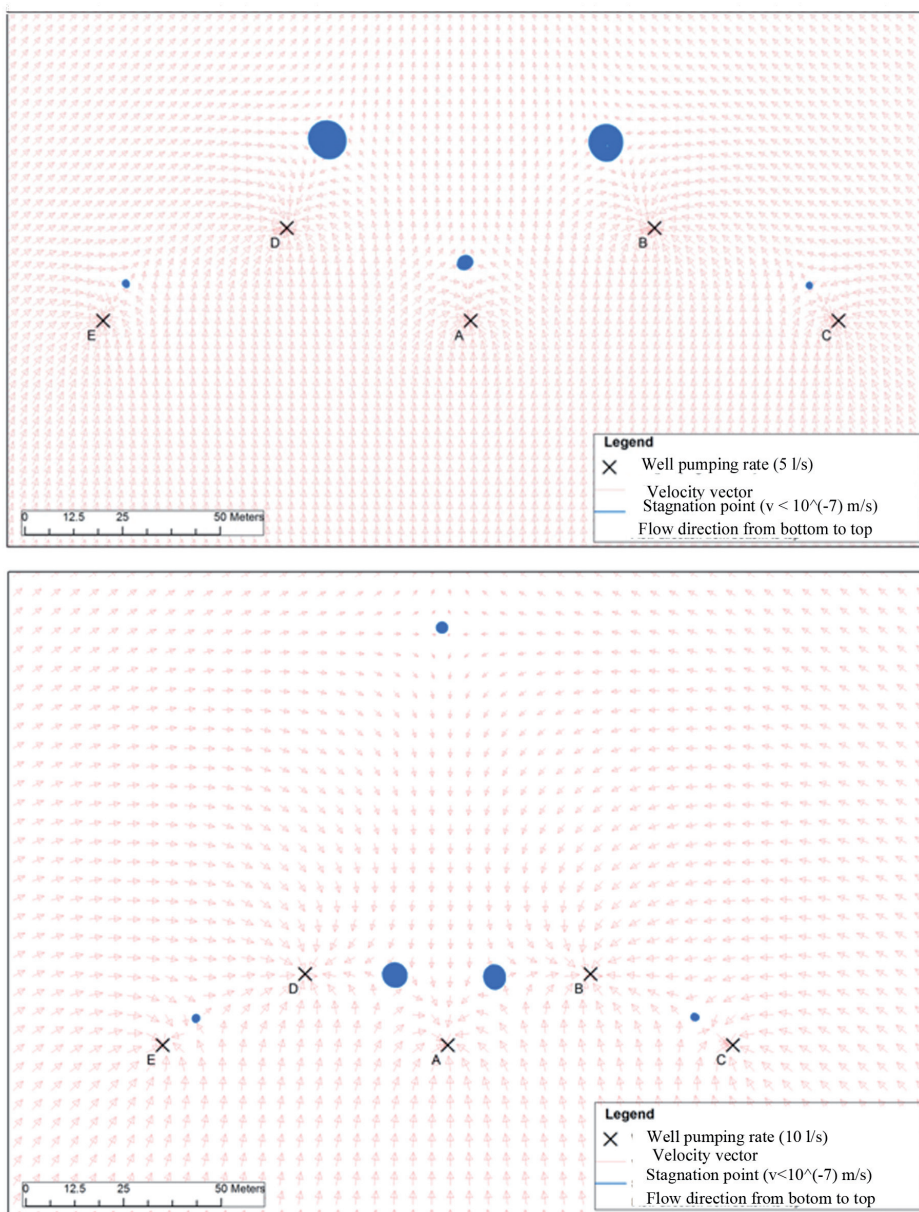
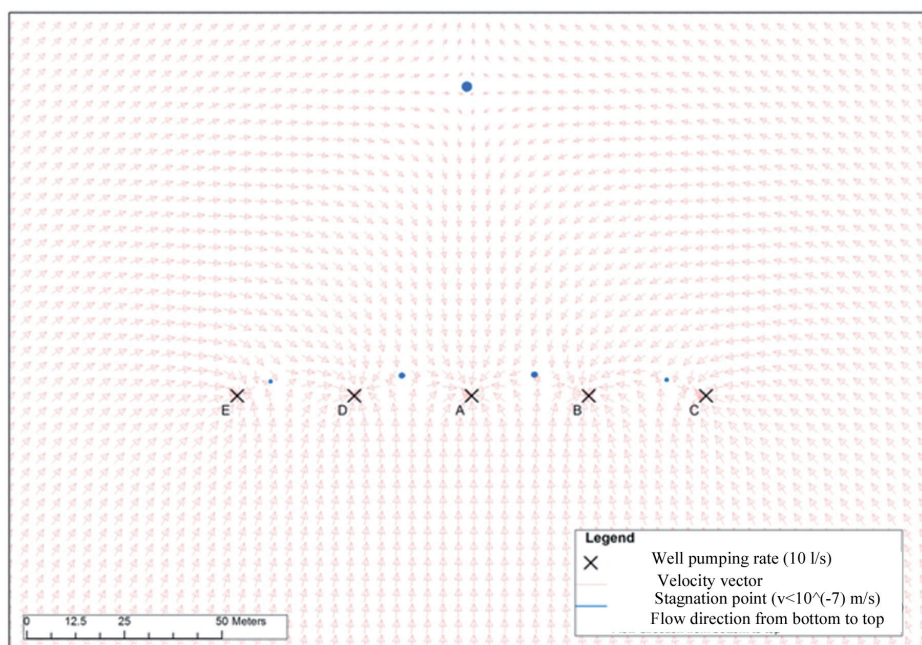


Fig. 10 - Vettori di velocità prima e dopo il cambiamento di posizione dei punti di stagnazione a) barriera in funzione con 5 l/s per pozzo b) barriera in funzione con 10 l/s per pozzo. I pozzi sono segnati con le croci, i punti di stagnazione sono curve di velocità molto basse (minori di 10^{-7} m/s), la direzione del flusso è perpendicolare alla barriera

- The velocity vectors before and after the change of position stagnation points.a) barrier with flow rate 5 l/s par well b) barrier with flow rate 10 l/s. The wells are indicated as a cross-shaped, stagnation points are the blue lines with low velocity (10^{-7} m/s). The groundwater flow is from the bottom to the top of aquifer figure.

Fig. 11 - Vettori di velocità e posizione dei punti di stagnazione con portata di 10 l/s per pozzo. I pozzi sono segnati con le croci, i punti di stagnazione sono curve di velocità molto basse (minori di 10^{-7} m/s), la direzione del flusso è perpendicolare alla barriera

- The velocity vectors and the position of stagnation points with 10 l/s per well. The wells are indicated as a cross-shaped, stagnation points are the blue lines with low velocity (10^{-7} m/s). The groundwater flow is from the bottom to the top of aquifer figure



Se R_0 [m] supera il valore di 13.50 m (che si ottiene nella configurazione proposta con circa 7 l/s per pozzo), il valore sempre più elevato della coordinata in ordinata del punto di stagnazione centrale cresce allontanandosi sempre più dalla barriera, richiamando al pozzo inquinante proveniente a valle della barriera. Come detto precedentemente, questo può essere un vantaggio per la cattura ma solo nel caso in cui la barriera non intercetta corpi superficiali né depressioni già esistenti. Come si può vedere nella Fig. 11, se un pozzo di monitoraggio viene posizionato a valle della barriera ma a monte del punto di stagnazione centrale, esso può fornire misure ed indicazioni sull'inquinante non reali.

CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato presentato un valido metodo analitico per calcolare la zona di cattura anche con geometrie complesse. L'algoritmo presentato permette un calcolo speditivo della curva di cattura per geometrie non lineari di pozzi barriera; è stata fornita anche una equazione esplicita per poter calcolare, a partire dalla conoscenza della posizione dei pozzi nell'acquifero, e delle grandezze dell'acquifero (velocità di flusso, spessore dell'acquifero e portata estraibile/iniettabile dei pozzi) la curva di cattura della barriera da progettare. Tale formula permette il posizionamento di 5 pozzi in qualsiasi posizione nello spazio complesso x, y . È possibile così, evitando di utilizzare programmi di calcolo più complessi, avere una idea di massima per ottimizzare la barriera per la cattura del fronte di inquinamento. Si è potuto infatti vedere come una barriera lineare funziona bene con particolari condizioni (JAVANDEL & TSANG, 1984) di flusso orizzontale rispetto la barriera pozzi e con una interdistanza ottimale tra i pozzi stessi (CHRIST & GOLTZ, 2002); quando il flusso di falda risulta esser perpendicolare rispetto alla barriera da progettare, il progettista deve

Fig. 11, if a monitoring well is located downstream to the barrier but upstream to the central stagnation point, it can measure a non-real concentration due to the attraction of the central well.

CONCLUSION

In this paper an analytical method for computing the capture zones also with complex geometry has been introduced. The presented algorithm allows to compute quickly the capture curve for non-linear geometries; an explicit equation is given to compute the capture curve of an hydraulic barrier, starting with the knowledge of wells position in the aquifer and the parameters of groundwater (flow velocity, thickness of aquifer and extraction/injection flow rate). This formula allows to place 5 wells in a casual position in the complex plane x, y . In this way, it is possible, without using any numerical model, to have an idea to optimize the capture curve of a barrier. It is possible to see that a linear barrier works well with some particular conditions (JAVANDEL & TSANG 1984) as an horizontal uniform flow and optimal wells distance (CHRIST & GOLTZ 2002); when the groundwater flow is perpendicular to the barrier, the designer must pay attention to maintain a critical distance between wells, as there must be a superposition between the linear wells; in fact, using a shorter distance than optimal one for $N = 5$ wells,

prestare molta attenzione a mantenere una distanza critica tra i pozzi, affinché si verifichi la sovrapposizione degli effetti tra i pozzi giacenti sulla stessa linea; difatti, usando una distanza di poco inferiore alla distanza supposta ottimale per $N = 5$ pozzi esistono alcune zone in cui la sovrapposizione degli effetti non avviene, rendendo così la barriera idraulica molto vulnerabile e non perfettamente funzionante allo scopo cui è stata progettata. Per validare i risultati ottenuti con la formula analitica, è stato implementato un modello, a parità di proprietà idrogeologiche in Modflow. I risultati ottenuti sono soddisfacenti:

- I punti di stagnazione calcolati con la formula analitica (1.7) hanno un errore di modello non superiore al 3-4%. Si può quindi a partire dalla conoscenza delle grandezze geometriche della barriera e per differenti valori del raggio fittizio, ottenere in via del tutto preliminare i punti di stagnazione della barriera idraulica
- Il fronte di cattura ottenuto con la formula analitica (1.8) ben si adatta a quello ottenuto con il modello numerico; gli errori più consistenti, che si aggirano intorno allo 0.6 % sono localizzati nella zona intorno all'origine degli assi. Ciò è dovuto al posizionamento del pozzo A, nell'origine degli assi, in cui la funzione Ψ di uguale flusso spesso non converge.
- Il posizionamento dei pozzi passando da una configurazione di tipo 1 (con $b=0$ m) ad una di tipo 3 (con $b=15$ m) permette una maggiore copertura a valle oltre che marginalmente alla barriera stessa; la geometria della barriera, con l'avanzamento di pozzi lungo l'asse y verso valle, permette la progettazione di barriere a favore di sicurezza per il contenimento di eventuali inquinanti presenti in falda. La conoscenza della posizione dei punti di stagnazione è importante per la giusta ubicazione di pozzi di monitoraggio.

Il metodo analitico quindi permette di conoscere i punti di stagnazione di una barriera con 5 pozzi, in modo veloce e preciso. Gli errori che sono stati calcolati come differenza tra i valori assoluti delle coordinate spaziali dei punti di stagnazione risultano molto bassi: tale metodo quindi può in prima approssimazione guidare il progettista di barriere idrauliche per il contenimento di inquinanti, con adeguate portate e posizionamento dei pozzi affinché si possano posizionare preventivamente pozzi di monitoraggio per il plume di inquinante.

OPERE CITATE / REFERENCES

- BEAR J. (1979) - *Hydraulics of groundwater*. McGraw-Hill, New York, 567 pp.
- BEAR J. & JACOBS M. (1965) - *On the movement of water bodies injected into aquifers*. Journal of Hydrology, **3**: 37-57.
- BERETTA G.P. (1992) - *Idrogeologia per il disinquinamento delle acque sotterranee*. Pitagora Editrice, Bologna.
- BERETTA G.P. (2003) - *Linee guida per il monitoraggio delle barriere idrauliche*. Università degli Studi di Milano - Dip. di Scienze della Terra.
- CHRIST J.A. & GOLTZ M.N. (2004) - *Containment of groundwater contamination plumes: minimizing drawdown by aligning capture wells parallel to regional flow*, Journal of Hydrology, **286**: 52-68.
- CHRIST J.A. & GOLTZ M.N. (2002) - *Hydraulic containment: analytical and semi-analytical models for capture zone curve delineation*. Journal of Hydrology, **262**: 224-244.
- CHRIST J.A., GOLTZ M.N. & HUANG J. (1999) - *Development and application of an analytical model to aid design and implementation of in situ remediation technologies*. Journal of Contaminant Hydrology, **37**: 295-317.
- CHUNHUI LU, RULAN GONG & JIAN LUO (2009) - *Analysis of stagnation points for pumping well in recharge areas*. Journal of Hydrology, **373**: 442-452.
- GORELICK S.M., FREEZE R.A., DONOHUE D. & KEELY J.F. (1993) - *Groundwater contamination: optimal capture and containment*. Lewis Publishers, Boca Raton, FL..

there are some zones where superposition does not occur. In this configuration, the hydraulic barrier is more vulnerable and it cannot work perfectly. To validate computed result with analytical formula, a model is implemented in Modflow with the same hydrogeological properties. The comparison shows satisfactory results:

- The stagnation points computed with analytical formula (1.7) have a model error less than 3-4%. Knowing the geometric parameters of the barrier, for different ratio $Q/2\pi UB$, it is possible to obtain the stagnation point of barrier in a preliminarily way.
- The capture zone calculated with analytical formula (1.8) is a good adaptation to that with numerical one; the biggest errors, that are about 0.6 % , are localized nearby the axis origin of reference system. This is due to the position of A well at the axis origin where the function Ψ becomes greater and greater.
- The positioning of wells passing from the arrangement 1 ($b=0$ meters) to the arrangement 3 ($b=15$ meters) allows a greater coverage to downstream; the barrier geometry, moving forward wells along positive direction of y -axis, allows a suitable barrier for the containment of groundwater pollution plumes. The knowledge of the position of stagnation point is important due to the fact that it can design a good position for monitoring pollution point.

The analytical method allows to know the zero-velocity points in a 5 wells arrangement, in a precise and fast way. The errors computed as the difference between absolute spatial coordinates values of stagnation points are not significant; this method can firstly help the hydraulic barrier designer for pollution containment, with right parameters as flow rate and geometric disposition as some monitoring pollution wells location.

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR MULTIWELL HYDRAULIC BARRIER CAPTURE ZONE DEFINING

- GUADAGNINI A. & FRANZETTI S. (1994) - *Probabilistic estimation of well catchments in heterogeneous aquifers*. Journal of Hydrology, **174**: 149-171.
- JAVANDEL I. & TSANG T.F., (1984) - *Capture zone type curves: a tool for aquifer cleanup*. Groundwater, **24** (5) : 616-625.
- JAVANDEL I. (1986) - *Application of capture-zone type curves for aquifer cleanup*, *Groundwater hydrology, contamination and remediation*. KHANBILVARDI R.M. & FILLOS J. (Eds.), Scientific Publications Co., Washington D.C.
- PRESS W.H, TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T. & FLANNERY B.P. (1992) - *Numerical Recipes in FORTRAN*. 2nd edition Cambridge University Press, New York, NY: 355-360.
- SHAFFER J.M (1987) - *Reserve path line calculation of time-related capture zones in nonuniform flow*. Groundwater, **25** (3): 283-289.
- SHAN C., (1999) - *An analytical solution for the capture zone of two arbitrarily located wells*. Journal of Hydrology, **222**: 123-128.
- SKVORTSOV E.V. & SUYUCHEVA D. T. (2004) - *Interaction between wells and a groundwater stream*. Fluid Dynamics, **40** (4): 575-584.
- TUMLINSON L.G., OSIENSKY J.L. & FAIRLEY J.P. (2006) - *Numerical evaluation of pumping well transmissivity estimates in laterally heterogeneous formations*. Journal of Hydrology, **14**(1-2): 21-30.

Received May 2012 - Accepted November 2012

