Inflazione in un'economia indicizzata: alcune generalizzazioni*

1. Introduzione

1.1 In un recente lavoro F. Modigliani e T. Padoa-Schioppa [1] (d'ora in poi denotati come "gli autori") analizzano le caratteristiche di un'economia, quale quella italiana, in cui i salari sono coperti al 100% nei confronti dell'inflazione, tramite il meccanismo della scala mobile. Tali caratteristiche sono riassunte dagli autori in 11 proposizioni. In questa nota intendiamo occuparci delle questioni relative alle prime tre di tali proposizioni, che sono le seguenti:

(1) "Data la produttività, le aliquote delle imposte indirette e quelle degli oneri sociali, esiste, per ogni valore del salario reale contrattuale, un solo livello del prodotto nazionale reale che sia coerente con la stabilità dei prezzi".

(2) "Se... l'occupazione e la produzione vengono mantenute a un livello superiore all'unico coerente con la stabilità dei prezzi, il risultato sarà un processo di continua inflazione anche se tale livello è inferiore a quello di piena occupazione".

(3) "Il tasso di inflazione cresce al crescere della frequenza degli adeguamenti della scala mobile".

---

* Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito di una ricerca finanziata dal C.N.R. Gli scriventi desiderano ringraziare il prof. G. Gandolfo dal quale hanno ricevuto lo stimolo ad occuparsi dell'argomento che forma oggetto della presente nota nonché utili suggerimenti; naturalmente essi assumono ogni responsabilità per quanto qui pubblicato. L'introduzione e le conclusioni sono state scritte in collaborazione, mentre il par. 2 è dovuto a M. L. Petit ed il par. 3 a P. C. Padoan.

1 F. Modigliani, T. Padoa-Schioppa: "La politica economica in una economia con salari indicizzati al 100 o più", in questa *Rivista*, marzo 1977.

Più precisamente dimostreremo che, al di fuori dell'ipotesi del tutto particolare adottata dagli autori riguardo all'intervallo di adeguamento dei prezzi, *a*) non esiste nell'ambito del loro modello alcun livello di produzione compatibile con la stazionarietà dei prezzi (questo risultato dipende dalla nostra generalizzazione concernente la lunghezza degli intervalli di adeguamento e dalla rigidità verso il basso dei prezzi ipotizzata dagli autori); *b*) il processo inflazionistico *non* dipende *unicamente* dall'essere il valore della produzione superiore a quello compatibile con la stazionarietà dei prezzi (ciò, come vedremo, è dovuto agli stessi motivi che spiegano il risultato sub *a*)).

1.2 Le proposizioni da (1) a (3) sono dimostrate dagli autori tramite una funzione di adeguamento del livello generale dei prezzi di mercato (P) che riflette una ipotesi di aggiustamento graduale. Tale funzione può essere scritta:

$$P - P_{-1} = g\{m(Q)WA - P_{-1}\} \quad 0 < g \leqslant 1 \tag{[1]}$$

ovvero, nella forma usata dagli autori,

$$P = gm(Q)WA + (1-g)P_{-1} \tag{[1 bis]}$$

ove m= rapporto fra prezzo al costo dei fattori e costo unitario del lavoro (m − 1 è quindi il *mark-up* sul costo del lavoro diretto, supposto funzione non decrescente del prodotto reale Q); W = salario orario monetario; A= grandezza data che tiene conto della produttività oraria, dell'aliquota degli oneri sociali e dell'aliquota delle imposte indirette; g= coefficiente di aggiustamento dei prezzi da parte delle imprese.

L'indicizzazione dei salari viene introdotta tenendo conto di un intervallo di adeguamento della scala mobile, supposto uguale all'intervallo di adeguamento dei prezzi, per cui si ha

$$W = \mu P_{-1} \tag{[2]}$$

ove μ è il livello del salario reale fissato al momento dell'ultima contrattazione collettiva. Sostituendo la [2] nella [1] si ottiene

$$P - P_{-1} = g\{m(Q)A\mu - 1\}P_{-1} \tag{[3]}$$

da cui

$$\frac{P - P_{-1}}{P_{-1}} = g\left\{m(Q)A\mu - 1\right\} \tag{[4]}$$

Da tale equazione deriva la condizione di stazionarietà [2] del livello dei prezzi, vale a dire la condizione per cui il tasso di inflazione è nullo

$$m(Q)A\mu - 1 = 0 \qquad \text{cioè}^{3} \qquad m(Q)A = \frac{1}{\mu} \tag{[5]}$$

Dalla [5] discende immediatamente la proposizione (1); supponendo poi che il livello di produzione effettiva sia maggiore di quello coerente con la [5], si ottengono le proposizioni (2) e (3).

Ora, le equazioni [1] e [2] sono suscettibili di alcune generalizzazioni che ci proponiamo di analizzare. Esse riguardano in primo luogo l'ampiezza dell'intervallo di adeguamento dei prezzi da parte delle imprese, che gli autori — come abbiamo visto — pongono uguale all'intervallo di adeguamento della scala mobile e, secondariamente, il valore di g supposto positivo e non superiore a uno. Nei casi che saranno considerati procederemo all'analisi sia delle condizioni di stabilità sia di quelle di stazionarietà dei prezzi, intendendo per condizioni di stabilità quelle che assicurano la convergenza dei prezzi a un valore stazionario, e per condizioni di stazionarietà quelle che assicurano assenza di movimento dei prezzi stessi.

1.3 Varie sono le considerazioni che inducono a ritenere non solo possibile ma addirittura più realistico considerare che i prezzi si adeguino con intervalli più brevi [4] di quelli relativi agli scatti della scala mobile.

In primo luogo si consideri la [1]. Essa è una funzione di

---

[2] Occorre precisare che gli autori, riferendosi a tale condizione, parlano di condizione di "stabilità", attribuendo implicitamente a tale termine il significato di "costanza". Poiché nei casi più generali da noi esaminati si pone anche il problema di esaminare la convergenza dei prezzi al valore stazionario, esame che richiede l'analisi delle condizioni di stabilità dinamica, abbiamo preferito, per evitare equivoci terminologici, parlare di condizioni di stazionarietà.

[3] La condizione di stazionarietà può anche essere ottenuta nel seguente modo: essendo la soluzione dell'equazione alle differenze finite [3] esprimibile come $P = Bs^t$ ove B è una costante arbitraria che risulta essere uguale al livello iniziale dei prezzi, P e $s = 1 - g + gmA\mu$, affinché sia $(P - P_{-1})/P_{-1} = 0$ cioè P = costante, deve essere $s = 1$, da cui $1 - g + gmA\mu = 1$ e quindi $mA = 1/\mu$.

[4] Si esclude il caso in cui l'intervallo di adeguamento dei prezzi sia maggiore di quello della scala mobile. Infatti, dato che secondo il meccanismo della scala mobile i salari — tra una contrattazione collettiva e l'altra — aumentano solo nel caso di aumenti di prezzo, è escluso che essi si muovano quando il periodo di adeguamento dei prezzi è più lungo, in quanto nel frattempo non è avvenuto alcun aumento di prezzo.

adeguamento dei prezzi da parte delle imprese. Secondo tale funzione le imprese adeguano i prezzi del periodo corrente in base alla differenza tra il valore "desiderato" dei prezzi — dato da mWA — e quello effettivo del periodo precedente. Poiché nulla vieta che A, ma soprattutto m, varino *durante* il periodo di adeguamento della scala mobile, ciò farà variare il livello desiderato dei prezzi, inducendo le imprese a un adeguamento degli stessi senza attendere il successivo scatto della scala mobile.

In secondo luogo, le politiche di fissazione dei prezzi non tengono conto unicamente dei costi, ma anche di considerazioni relative all'andamento del mercato di sbocco dei prodotti. Queste considerazioni possono indurre le imprese — allo scopo di non subire perdite di competitività — a diluire nel tempo gli aumenti di prezzo in maniera ancora più graduale di quanto sia contemplato da un adeguamento, sia pur parziale, in corrispondenza del periodo di riferimento della scala mobile.

Infine, P rappresenta il livello generale dei prezzi il cui andamento è frutto degli adeguamenti delle singole imprese (o gruppi di esse), i quali sono quasi certamente non sincronizzati tra loro, ma si sovrappongono secondo "un qualche andamento stocastico";[5] di conseguenza si può supporre che il movimento del livello generale dei prezzi tende ad essere continuo o che, in ogni caso, un andamento continuo possa rappresentare abbastanza fedelmente tale movimento.

In sintesi, poiché è difficile assumere — contrariamente a quanto fanno gli autori — un particolare intervallo di tempo come "l'unità di tempo naturale comune all'intera economia",[6] si può supporre che l'andamento effettivo dei prezzi nel caso in esame possa essere approssimato alternativamente: i) da una funzione di adeguamento di tipo discreto, ma in cui l'intervallo di adeguamento dei prezzi è una frazione di quello della scala mobile, nel qual caso si ottiene un'equazione alle differenze finite non più del primo ordine, ma di ordine superiore, o ii) da una funzione in cui i prezzi si muovano in modo continuo, la quale, considerata congiuntamente

5 Vedi S. J. TURNOVSKY, "On the Formulation of Continuous Time Macroeconomic Models with Asset Accumulation", *International Economic Review*, febbraio 1977, p. 2; v. anche C. R. WYMER, "Continuous Time Models in Macro-Economics: Specification and Estimation", Paper prepared for the SSRC - Ford Foundation Conference on "Macroeconomic Policy and Adjustment in Open Eonomies", Fanhams Hall, Ware, England, aprile 1976.

6 Vedi TURNOVSKY, *op. cit.*, p. 2.

all'adeguamento discontinuo della scala mobile, dà luogo a una equazione di tipo misto differenziale — alle differenze finite. Di questi due casi ci occuperemo rispettivamente nei paragrafi 2 e 3.

Rimane da aggiungere qualcosa attorno al valore di g. Ove si ammetta che le imprese sono in grado di prevedere l'inflazione (soprattutto quando quest'ultima tende ad assumere valori elevati), si deve pure ammettere che esse sono in grado di "anticiparla". Ciò implica considerare la possibilità di un valore di g maggiore di uno (nel caso discreto).[7] Tuttavia, poiché per $g>1$ il modello con intervalli di adeguamento diversi diventa esplosivo (v. par. 2), allo scopo di discostarci il meno possibile dalle ipotesi degli autori continueremo a supporre $g \leqslant 1$.

Passando poi al caso continuo, g diventa una velocità di aggiustamento, ed è del tutto possibile che essa sia maggiore di 1.[8]

2. L'aggiustamento nel discreto

Le equazioni del caso generale sono

$$P-P_{-L}=g(mAW-P_{-L}) \qquad [6]$$

$$W=\mu P_{-T} \qquad [7]$$

ove L indica il periodo di adeguamento dei prezzi e T il periodo di adeguamento della scala mobile. Il caso esaminato dagli autori si verifica quando $L=T$ (questo comune valore a sua volta viene posto come unità di tempo). Poiché abbiamo argomentato nel paragrafo 1 che

7 In generale nel caso discreto si ha $y_t-y_{t-1}=g(\hat{y}_t-y_{t-1})$, ove $\hat{y}_t$ è il valore desiderato al tempo t e y_t il valore effettivamente verificatosi. Poiché per $g=1$ si ha $y_t=\hat{y}_t$ è plausibile supporre $g=1$. Tuttavia nel nostro caso non è inconcepibile un "sovraggiustamento" ($g>1$) per le ragioni dette nel testo. In effetti si può sostenere che la determinazione della grandezza di g è una questione empirica, nella quale non è qui il caso di entrare; ma non ci sembra possibile escludere un valore di g maggiore di uno sulla base di ragionamenti logici.

8 Nel caso continuo l'equazione di aggiustamento è $\dot{y}=g(\hat{y}-y)$, $g>0$ (*) ove il punto sopra la variabile denota la derivata rispetto al tempo; tale equazione equivale alla funzione di ritardi distribuiti esponenzialmente nel continuo: $y_t=\int_0^\infty ge^{-gs}\hat{y}(t-s)\,ds$. La grandezza di g denota la velocità di aggiustamento, che per sua natura può assumere qualsiasi valore tra zero e $+\infty$. In effetti per $g=+\infty$ l'aggiustamento è istantaneo e $\hat{y}=y$, come si può anche vedere dal fatto che $1/g$ è il ritardo medio di aggiustamento (*mean-time lag*); tale ritardo tende ovviamente a zero per $g\rightarrow+\infty$ (cfr., ad es., A. R. BERGSTROM, "The Construction and Use of Economic Models", The English Universities Press, Londra 1967). Stime empiriche di equazioni del tipo (*) hanno dato, sia pur in contesti diversi, valori di g notevolmente superiori all'unità (cfr., ad es., M. KNIGHT, "Euro-dollars, Capital Mobility, and the Forward Exchange Market", *Economica*, febbraio 1977).

$L<T$, supponiamo per semplicità che L sia un sottomultiplo intero di T; senza alcuna perdita di generalità possiamo allora prendere L come unità di tempo, per cui il periodo di adeguamento della scala mobile diventa un multiplo intero del periodo di adeguamento dei prezzi. Esamineremo dapprima il caso generale per poi illustrare i risultati mediante l'esame di un caso particolare.

2.1 *Il caso generale*

Posto $L=\frac{1}{n}T$, ove n è un intero positivo, si ha $T=nL$ e quindi, fissando $L=1$, la [6] e [7] diventano

$$P-P_{-1}=g(mAW-P_{-1}) \tag{8}$$

$$W=\mu P_{-n} \tag{9}$$

Sostituendo la [9] nella [8] si ha un'equazione alle differenze finite dell'n-simo ordine:

$$P-(1-g)\,P_{-1}-gmA\,\mu\,P_{-n}=0 \tag{10}$$

la cui soluzione è del tipo [9]

$$P=B_1s_1^t+B_2s_2^t+B_3s_3^t+\ldots+B_ns_n^t \tag{11}$$

ove le s_i sono le radici dell'equazione caratteristica

$$s^n-(1-g)s^{n-1}-gmA\mu=0 \tag{12}$$

Per evitare che, nel caso di stabilità, i prezzi convergano a zero, si deve avere una radice uguale ad 1.[10] Ponendo quindi $s=1$ nella [12] si ha

$$1-1+g-gmA\,\mu=0$$

da cui

$$mA\mu=1$$

e cioè

$$mA=\frac{1}{\mu} \tag{13}$$

9 Cfr. G. Gandolfo, *Metodi di dinamica economica*, ISEDI, Milano, 1977, 2ª ed., vol. I, cap. 6, al quale rinviamo anche per le trasformazioni che subisce la [11] nel caso di radici multiple e/o di radici complesse.

10 In tal caso, infatti, la [11] assume la forma $P = B_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} B_i s_i^t$ ove s_j è la radice uguale ad uno. La presenza di una costante arbitraria isolata è necessaria perché, se così non fosse, la condizione di stabilità — e cioè la condizione che tutte le radici della [12] abbiano modulo minore dell'unità — assicurerebbe la convergenza dei prezzi verso il valore zero, il che non avrebbe alcun senso dal punto di vista economico.

che coincide con la condizione di stazionarietà dei prezzi nel caso esaminato dagli autori. Ora però questa condizione non è più sufficiente. Infatti, per avere *stabilità* (in senso dinamico) dei prezzi occorre che le altre radici caratteristiche abbiano modulo minore dell'unità.

Chiamando s_1 la radice unitaria, tenendo presente la [13], possiamo riscrivere la [12] come

$$s^n-(1-g)s^{n-1}-g=0 \tag{14}$$

Si noti che, in base al teorema di Cartesio, la [14] non può avere più di una radice positiva. Tutte le altre radici saranno dunque negative o complesse e si avrà quindi, in ogni caso, un movimento oscillatorio improprio o proprio.[11]

Dimostriamo ora che *condizione necessaria e sufficiente di stabilità è $g<1$.*

La necessità è immediata: poiché il prodotto delle radici è uguale in valore assoluto al termine noto (e cioè a g) e poiché la [14] ha una radice uguale all'unità, se fosse $g>1$ ci sarebbe senz'altro almeno una radice con modulo maggiore di uno. Anche la sufficienza, che a prima vista parrebbe non facilmente dimostrabile, è immediata grazie ad un importante teorema [12] secondo cui un'equazione del tipo

$$s^n-(a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\ldots+a_n)=0$$

dove $a_i\geqslant 0$ per $i=1, 2, \ldots n$,

ha una radice semplice positiva dominante (e cioè con modulo maggiore di quello di qualsiasi altra radice) che è compresa fra 1 e $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Nel nostro caso, se $g<1$, allora $(1-g)>0$ ed il suddetto teorema diventa immediatamente applicabile. Poiché $\sum_{i=1}^{n} a_i=1-g+g=1$, risulta dimostrato che la radice $s_1=1$ è dominante e quindi che tutte le altre radici hanno modulo minore dell'unità, che è appunto la condizione di stabilità.

Esaminiamo adesso più dettagliatamente la natura delle radici (e cioè delle rimanenti radici, posto $s_1=1$) nel caso che si abbia

11 Per la dizione di oscillazioni "improprie" in quanto distinte dalle oscillazioni "proprie", si veda G. Gandolfo, *op. cit.*, vol. I, p. 18.

12 Si veda R. Sato, "A Further Note on a Difference Equation Recurring in Economic Theory", *Journal of Economic Theory*, marzo 1970.

$g<1$, e cioè nel caso che si verifichi la condizione di stabilità. Si consideri la funzione

[15] $$f(s)=s^n-(1-g)\ s^{n-1}-g$$

da cui

$$f'(s)=ns^{n-1}-(n-1)\ (1-g)\ s^{n-2}$$

ovvero

[16] $$f'(s)=s^{n-2}\ [ns-(n-1)\ (1-g)]$$

Si avranno due casi:

1) *n pari*. In tal caso $f(s) \to +\infty$ per $s \to -\infty$ e $f(s)=-g<0$ per $s=0$, quindi la $f(s)$ intersecherà almeno una volta il semiasse negativo delle s: ci sarà cioè almeno una radice reale negativa. Inoltre, poiché $s^{n-2}>0$ mentre $ns\ -(n-1)(1-g)$ è negativo per $s<0$, si ha $f'(s)<0$ per $s<0$, per cui la $f(s)$ è monotona decrescente per $s<0$ e non può intersecare più di una volta il semiasse negativo delle s. Si avrà quindi una sola radice reale negativa (ovviamente compresa tra zero e -1) mentre tutte le altre $n-2$ radici saranno complesse coniugate (con modulo minore dell'unità).

2) *n dispari*. In tal caso $f(s) \to -\infty$ per $s \to -\infty$ e $f(s)=-g<0$ per $s=0$. Inoltre, poiché $s^{n-2}<0$ per $s<0$, si ha $f'(s)>0$ per $s<0$ per cui la $f(s)$ è monotona crescente per $s<0$ e non può quindi avere alcuna intersezione con il semiasse negativo delle s. Non ci sarà dunque alcuna radice reale negativa e tutte le altre $n-1$ radici saranno complesse coniugate (ovviamente con modulo minore dell'unità).

In conclusione, per qualsiasi valore di n, qualora la condizione di stabilità $g<1$ sia verificata, l'andamento dei prezzi sarà di tipo oscillatorio. Data però la rigidità dei prezzi verso il basso, anche una oscillazione smorzata darà luogo, come verrà chiarito nel paragrafo 4, ad un movimento di allontanamento dal valore stazionario.

Ci si può ora chiedere se i prezzi non potrebbero però, sotto determinate condizioni, rimanere stazionari, e cioè tali che $P=$ costante. Considerando la [13], si può vedere che si avrà in generale [13]

[13] E cioè nel senso che si possa avere stazionarietà per qualsiasi valore delle condizioni iniziali. È noto che in linea di principio si possono trovare delle condizioni iniziali tali che nella [11], $B_i=0$ (per $i=2, 3, \dots n$), nel qual caso il valore delle s_i è irrilevante; ma si tratta ovviamente di un caso del tutto particolare. Quanto ora detto vale anche in relazione alle equazioni che esamineremo in seguito.

stazionarietà se e solo se $s_1=1$ e tutte le altre radici sono nulle. Per il vero, potrebbe sembrare che si possa avere stazionarietà anche quando alcune o tutte le radici (ad es., m radici, con $m\leqslant n$) siano uguali alla unità e le rimanenti $(n-m)$ radici siano uguali a zero. Tale caso tuttavia è da escludersi poiché si ricadrebbe nel caso di radici multiple e nella soluzione apparirebbe un polinomio in t di grado $m-1$ (ove m è la molteplicità della radice unitaria) che darebbe chiaramente luogo ad un movimento esplosivo.[14]

Si può ora dimostrare che condizione necessaria e sufficiente di stazionarietà è $g=0$. Infatti, per qualsiasi valore non nullo di g, la [14] — o se si vuole, la [12] — non può avere alcuna radice nulla (si rammenti che il termine noto è uguale al prodotto delle radici) e quindi la condizione generale di stazionarietà non può essere verificata. Ma, se $g=0$, il valore di $mA\mu$ diventa del tutto irrilevante poiché la [8] si riduce a

$$P-P_{-1}=0$$

Sembra banale ricordare che $g=0$ è incompatibile con le ipotesi del modello poiché tale condizione equivale a dire che gli imprenditori *non* adeguano i prezzi qualsiasi cosa succeda.

Nell'ambito delle ipotesi del modello,[15] quindi, è esclusa, nel caso discreto, sia la convergenza sia la stazionarietà dei prezzi, i quali si muoveranno allontanandosi sempre di più dal livello di partenza anche quando $mA\mu=1$.

2.2 *Un esempio* [16]

Proponiamo come esempio il caso in cui, posto che la scala mobile scatti ogni trimestre, gli imprenditori adeguino i prezzi ogni mese. Si avrà in tal caso $L=\frac{1}{3}T$ e quindi $T=3L$, da cui, posto $L=1$, si ha

[17] $$W=\mu P_{-3}$$

[18] $$P-P_{-1}=g(mAW-P_{-1})$$

[14] Si veda G. Gandolfo, *op. cit.*, vol. I, p. 114. Notiamo inoltre che anche la presenza di radici complesse esclude la stazionarietà dei prezzi.

[15] Tranne che nel caso particolare proposto dagli autori.

[16] Il lettore potrà, a suo gradimento, analizzare qualsiasi altro intervallo di adeguamento secondo le linee del presente esempio e dell'analisi generale effettuata nel paragrafo 2.1.

Sostituendo la [17] nella [18] e riordinando i termini si ha

[19] $$P - (1 - g) P_{-1} - gmA\mu P_{-3} = 0$$

che ha come soluzione

[20] $$P = B_1 s_1^t + B_2 s_2^t + B_3 s_3^t$$

ove le s sono le radici dell'equazione caratteristica

[21] $$s^3 - (1 - g) s^2 - gmA\mu = 0$$

Ponendo una radice (ad esempio s_1) uguale all'unità per evitare la convergenza a zero, si ha

$$1 - 1 + g - gmA\mu = 0$$

e cioè

$$mA\mu = 1,$$

da cui

[22] $$mA = \frac{1}{\mu}$$

L'equazione caratteristica diventa quindi

$$s^3 - (1 - g) s^2 - g = 0$$

ovvero, dividendo per $(s-1)$,

[23] $$s^2 + gs + g = 0$$

Le condizioni di stabilità sono [17]

[24] $$\begin{aligned} 1 + g + g &> 0 \\ 1 - g &> 0 \\ 1 - g + g &> 0 \end{aligned}$$

e cioè

$$g < 1.$$

Il discriminante dell'equazione [23] è $\Delta = g^2 - 4g$, per cui si avrà $\Delta \lesseqgtr 0$ a seconda che $g \lesseqgtr 4$. Se la condizione di stabilità è soddisfatta le radici saranno necessariamente complesse coniugate e si avrà un movimento oscillatorio. Pertanto, come si è già visto nel caso generale, a causa dell'ipotesi di rigidità dei prezzi verso il basso questi ultimi si allontaneranno, col passare del tempo, dal valore stazionario.

---

[17] Cfr. G. Gandolfo, *Metodi di dinamica economica*, *op. cit.*, vol. I, p. 63.

La condizione di stazionarietà si verificherà solo quando le altre due radici (si rammenti che si è posto $s_1 = 1$) siano nulle, e cioè, come si può vedere dalla [23], quando $g = 0$, il che è incompatibile con le ipotesi del modello.

3. L'aggiustamento nel continuo

Se supponiamo che i prezzi si adeguino in modo continuo il sistema diventa del tipo

[25] $$\begin{aligned} \dot{P} &= g(mAW - P) \\ W &= \mu P_{-1} \end{aligned}$$

da cui si ottiene una equazione mista differenziale — alle differenze [18]

[26] $$\dot{P} + gP - gmA\mu P_{-1} = 0$$

la cui soluzione è del tipo

[27] $$P(t) = \sum_{r=1}^{\infty} B_r e^{s_r t}$$

ove le s_r sono le radici della equazione caratteristica

[27 bis] $$s + g - gmA\mu e^{-s} = 0$$

Anche in questo caso dobbiamo ricercare le condizioni per evitare una convergenza a zero dei prezzi. Ciò implica assumere che una radice reale sia nulla [19] e ciò (come si vede ponendo $s = 0$ nella [27 bis]) comporta $mA\mu = 1$, condizione uguale a quella ottenuta nel caso discreto.

Consideriamo quindi l'equazione

[28] $$s + g - ge^{-s} = 0$$

Poiché $g > 0$, si ha che la [28] ha una radice reale che è semplice; [20] non vi saranno quindi altre radici reali oltre quella $s = 0$. Le altre infinite radici saranno complesse. Queste ultime sono rap-

---

[18] V. Gandolfo, *op. cit.*, vol. II, cap. 4.

[19] In tal caso infatti la [27] assume la forma $P = B_1 + \sum_{r=2}^{\infty} B_r e^{s_r t}$ ove s_1 è la radice nulla. La presenza di una costante arbitraria isolata è necessaria perché, ove così non fosse, i prezzi convergerebbero in caso di stabilità verso il valore zero, il che non avrebbe senso dal punto di vista economico.

[20] V. Gandolfo, *op. cit.*, p. 504.

presentate dalla coppia tipica $a \pm ib$. Si dimostra[21] che a e b sono date dalla soluzione del sistema di equazioni trascendenti:

$$[29] \qquad \begin{aligned} a &= -g + ge^{-a}\cos b \\ b &= ge^{-a}\,\mathrm{sen}\, b \end{aligned}$$

Notiamo che la seconda equazione del sistema [29] implica $b > 0$, cioè $2k\pi < b < (2k+1)\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Si avrà perciò un ciclo maggiore per $k = 0$ e cicli minori per $k = 1, 2, \ldots$ Si ottiene poi dalla stessa equazione

$$e^a = g\,\frac{\mathrm{sen}\, b}{b} \quad \text{e cioè} \quad a = \ln g + \ln \frac{\mathrm{sen}\, b}{b}$$

ove ln indica il logaritmo naturale.

Sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$\ln \frac{\mathrm{sen}\, b}{b} - \frac{b}{\mathrm{tang}\, b} + (g + \ln g) = 0$$

Il sistema [29] può essere pertanto riscritto così:

$$[30] \qquad \begin{aligned} &\ln \frac{\mathrm{sen}\, b}{b} - \frac{b}{\mathrm{tang}\, b} = -(g + \ln g) \\ &a = \ln g + \ln \frac{\mathrm{sen}\, b}{b} \end{aligned}$$

Dato g, otteniamo dalla prima equazione il valore di b che, sostituito nella seconda, permette di ottenere il valore di a.

Si tratta ora di studiare l'andamento dell'equazione

$$[31] \qquad f(b) = \ln \frac{\mathrm{sen}\, b}{b} - \frac{b}{\mathrm{tang}\, b}$$

la quale assume l'andamento raffigurato nel graf. 1.

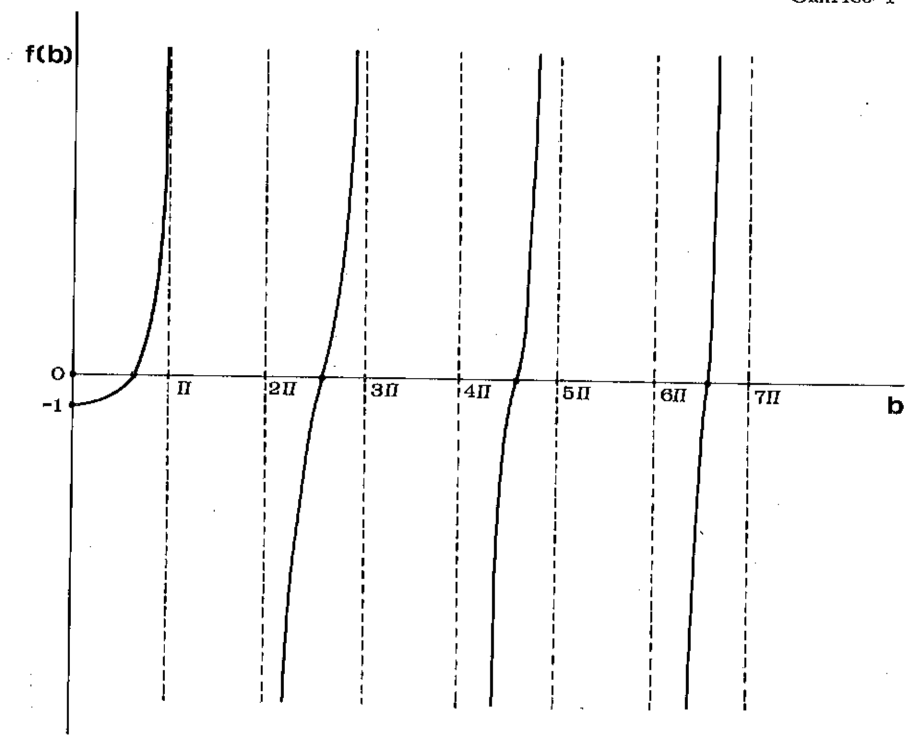
Si ha infatti che nell'intervallo $0 - \pi$ (ricordando il teorema di L'Hôpital) che per $b \to 0$ la $f(b) \to -1$ e per $b \to \pi$ la $f(b) \to +\infty$.

Inoltre si ha che $f'(b) = \dfrac{b}{\mathrm{sen}\, b} \cdot \dfrac{b\cos b - \mathrm{sen}\, b}{b^2} - \dfrac{\mathrm{tang}\, b - b/\cos^2 b}{\mathrm{tang}^2 b}$

$$= \frac{1}{\mathrm{tang} b} - \frac{1}{b} - \frac{1}{\mathrm{tang} b} + \frac{b}{\mathrm{sen}^2 b} = \frac{b^2 - \mathrm{sen}^2 b}{b\,\mathrm{sen}^2 b} = \frac{(b - \mathrm{sen}\, b)\,(b + \mathrm{sen}\, b)}{b\,\mathrm{sen}^2 b}$$

21 V. Gandolfo, *op. cit.*, p. 514 e segg.

Grafico 1



Poiché per l'intervallo $0 —— \pi$ si ha $b > \mathrm{sen}\, b$, ne segue che $f'(b) > 0$. Nell'intervallo $2\pi —— 3\pi$, per $b \to 2\pi$ la $f(b) \to -\infty$[22] e per $b \to 3\pi$ la $f(b) \to +\infty$. Inoltre si ha sempre $f'(b) > 0$, per cui si ottiene l'andamento descritto nel grafico.

I valori di b si ottengono dall'intersezione di f(b) con una retta parallela all'asse delle ascisse al livello $-(g + \ln g)$. Considerando l'intervallo entro cui si muove b si avrà un ciclo maggiore[23] per $-(g + \ln g) > -1$, cioè $g + \ln g < 1$, ovvero $g < 1$. Per $g \geq 1$ si avranno cicli minori (con ampiezza minore, ovvero con frequenza maggiore).

Abbandoniamo ora l'ipotesi di g dato e consideriamo l'andamento di a e b al variare di g. Consideriamo la

$$[32] \qquad \varphi(b, g) = \ln \frac{\mathrm{sen}\, b}{b} - \frac{b}{\mathrm{tang}\, b} + g + \ln g = 0$$

22 Per $b \to 2\pi$ da destra, sen b/b tende a zero e il logaritmo tende a $-\infty$; tang b tende a $-\infty$ e quindi $b/\mathrm{tang}\, b \to 0$.

23 V. Gandolfo, *op. cit.*, p. 516.

Supponendo verificato il teorema delle funzioni implicite si ha

$$\frac{db}{dg} = -\frac{\varphi_g}{\varphi_b}\ ;\ \text{si ha}\ \varphi_g = 1 + 1/g\ ;\ \varphi_b = \frac{b^2 - \mathrm{sen}^2 b}{b\,\mathrm{sen}^2 b}\ \text{e quindi}$$

$$\frac{db}{dg} = -\frac{(1 + 1/g)\,b\,\mathrm{sen}^2 b}{b^2 - \mathrm{sen}^2 b}$$

Poiché sappiamo già che $b^2 - \mathrm{sen}^2 b > 0$, si ha $db/dg < 0$; ne segue che b (cioè la frequenza delle oscillazioni del ciclo) è una funzione *decrescente* di g in ciascuno degli intervalli.

Consideriamo ora la relazione tra a e g. Tenendo presente che

$$a = \ln g + \ln \frac{\mathrm{sen}\, b}{b} \quad \text{si ha}$$

$$\frac{da}{dg} = \frac{1}{g} + \frac{b\cos b - \mathrm{sen}\, b}{b\,\mathrm{sen}\, b}\,\frac{db}{dg} = \frac{1}{g} + \frac{(\cos b)(b - \mathrm{tang}\, b)}{b\,\mathrm{sen}\, b}\,\frac{db}{dg} =$$

$$= \frac{1}{g} + \frac{b - \mathrm{tang}\, b}{b\,\mathrm{tang}\, b}\,\frac{db}{dg}$$

Poiché nell'intervallo 0 —— $\pi/2$ si ha $\mathrm{tang}\, b > 0$ e $\mathrm{tang}\, b > b$ la prima frazione del secondo termine della espressione sopra riportata è negativa e quindi, essendo $db/dg < 0$, si ha $da/dg > 0$. Nell'intervallo $\pi/2$ —— π si ha $\mathrm{tang}\, b < 0$ e $\mathrm{tang}\, b < b$, per cui la frazione di cui sopra è negativa e ugualmente si ha $da/dg > 0$. Infine, per $b \to \pi/2$, la frazione tende a zero per cui si ha $da/dg \to \to 1/g > 0$. Si ottengono risultati simili per gli altri intervalli per cui $da/dg > 0$ e cioè a (l'ampiezza delle oscillazioni) è funzione *crescente* di g in ciascuno degli intervalli.

Per quanto riguarda l'andamento dei cicli è possibile dimostrare che si ottiene $a < 0$, vale a dire cicli smorzati, in ogni caso.

i) Consideriamo dapprima il caso $g \to 0$. Ne segue che $\ln g \to -\infty$ e quindi $-(g + \ln g) \to +\infty$. Dalla figura si desume che $b \to (2k+1)\,\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ e, di conseguenza, $\mathrm{sen}\, b \to 0$.

Ne segue che $\dfrac{\mathrm{sen}\, b}{b} \to 0$ e allora $e^a = g\,\dfrac{\mathrm{sen}\, b}{b} \to 0$, cioè $a \to -\infty$.

ii) Consideriamo ora il caso $g \to +\infty$. In tale caso occorre distinguere il primo intervallo dai successivi. Nel primo intervallo,

come già si è visto, si può considerare solo $g < 1$; per $g \to 1$, $b \to 0$ e $\mathrm{sen}\, b/b \to 1$ (applicando il teorema di L'Hôpital) per cui

$$e^a = g\,\frac{\mathrm{sen}\, b}{b} \to 1 \quad \text{cioè} \quad a \to 0.$$

Essendo la $a = a(g)$ continua e con derivata prima positiva, da i) e ii) segue che $a < 0$ nell'intervallo considerato.

Trattiamo ora gli altri intervalli. Per $g \to +\infty$, $-(g + \ln g) \to \to -\infty$ e $b \to 2k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Per cui $\mathrm{sen}\, b \to 0$ e non si può individuare immediatamente il limite di $e^a = g\,\dfrac{\mathrm{sen}\, b}{b}$. Per fare ciò procediamo come segue:

ponendo $e^a = \dfrac{1}{b}\,\dfrac{g}{1/\mathrm{sen}\, b}$ e applicando il teorema di L'Hôpital alla seconda frazione

$$\lim \frac{1}{b}\,\frac{g}{1/\mathrm{sen}\, b} = \lim \left\{ \frac{1}{b} \cdot 1 \Bigg/ \frac{-\cos b\,\dfrac{db}{dg}}{\mathrm{sen}^2 b} \right\}$$

e sostituendo db/dg dalla espressione sopra ottenuta

$$\lim \left\{ \frac{1}{b} \cdot 1 \Bigg/ \left[-\frac{\cos b}{\mathrm{sen}^2 b} \cdot \frac{-\left(1 + \dfrac{1}{g}\right) b\,\mathrm{sen}^2 b}{b^2 - \mathrm{sen}^2 b} \right] \right\} = \lim \left\{ 1 \Bigg/ \frac{[b^2 \cos b]\left(1 + \dfrac{1}{g}\right)}{b^2 - \mathrm{sen}^2 b} \right\}$$

Come si è visto sopra, per $g \to +\infty$, $b \to 2k\pi$ e $\mathrm{sen}\, b \to 0$. Inoltre $\cos b \to 1$ e $\dfrac{1}{g} \to 0$. Ne segue che $\lim e^a = \dfrac{1}{b^2/b^2} = 1$ pertanto $a \to 0$. Anche in questo caso quindi $a < 0$.

In conclusione avremo un numero infinito di cicli smorzati intorno a un valore stazionario corrispondente alla radice nulla, cioè

$$P(t) = B_1 + \sum_{r=2}^{\infty} B_r e^{a_r t} (\cos b_r - C) \qquad [33]$$

ove $a_r < 0$ e B_r, C sono costanti arbitrarie.

Tale risultato teorico non si verificherà però in concreto in quanto, similmente a quanto accade nel caso di aggiustamenti discreti, la rigidità impedisce che i prezzi, una volta raggiunto il punto di svolta superiore del ciclo, ridiscendano verso il basso.

Ci si può chiedere se i prezzi potrebbero, sotto determinate condizioni, rimanere stazionari, e cioè tali che $P =$ costante. Considerando la [27] si può vedere che si avrebbe stazionarietà se e solo se tutte le radici fossero nulle. Ciò è escluso in quanto, come abbiamo visto, tutte le radici meno una sono complesse, salvo ovviamente il caso particolare in cui $g = 0$. Ciò esprime il fatto banale che i prezzi rimangono costanti se essi non vengono adeguati, poiché $g = 0$ implica, dalla prima della [25], $\dot{P} = 0$.

Nell'ambito delle ipotesi del modello, quindi, è esclusa nel caso continuo sia la convergenza che la stazionarietà dei prezzi, i quali si muoveranno allontanandosi sempre di più dal livello di partenza anche quando $mA\mu = 1$.

4. Analisi dei risultati e conclusioni

Dalle analisi svolte nei paragrafi 2 e 3 risulta che il movimento dei prezzi, sia nel caso discreto che in quello continuo, è di tipo oscillatorio (proprio o improprio). Nel caso discreto tale movimento è convergente se il coefficiente di adeguamento dei prezzi g è minore di uno, e divergente nel caso opposto; si hanno oscillazioni di ampiezza costante se $g = 1$. Nel caso continuo si ottengono sempre, qualunque sia il valore di g, cicli smorzati che hanno ampiezza crescente e frequenza decrescente al crescere di g. In ogni caso i cicli hanno luogo attorno a un valore stazionario, purché si verifichi la condizione (che secondo gli autori assicura invece la costanza del livello dei prezzi) $mA\mu = 1$.

Questi risultati analitici permettono di trarre alcune conclusioni sul piano economico. Anche quando $mA\mu = 1$, la convergenza dei prezzi a un valore stazionario, pur ammettendo che se ne verifichino le condizioni, rappresenta un risultato solo teorico. Infatti, poiché nel caso in esame si assume una rigidità verso il basso dei prezzi, il movimento oscillatorio (sia esso convergente o no) si arresterà quando la semionda crescente avrà raggiunto il valore massimo superiore, attestandosi a tale livello. Questa situazione darà allora luogo a due possibili conseguenze: *a*) tale valore massimo, permanendo nel tempo, costituirà il nuovo prezzo di riferimento per l'adeguamento della scala mobile, facendo ripartire da quel livello il processo inflazionistico; oppure *b*) il valore del prezzo generato dal primo ciclo sarà sopravanzato da quello generato da un ciclo, di ampiezza maggiore, che nel frattempo sarà sopravvenuto, inducendo un ulteriore aumento dei prezzi; questo risultato potrà ripetersi qualora sopravvengano cicli che, pur sempre smorzati, abbiano ampiezza maggiore del precedente. Il valore massimo dei prezzi generato da tali movimenti sarà allora quello che, permanendo nel tempo, verrà preso come valore di riferimento per il successivo scatto della scala mobile.[24] Lasciamo al lettore la facoltà di definire gli infiniti possibili tipi di movimento dei prezzi. Rimane comunque confermato che tale movimento sarà, in ogni caso, nel senso crescente. C'è poi da aggiungere che, poiché nel caso continuo le ampiezze dei cicli saranno crescenti al crescere di g, il processo di crescita dei prezzi sarà direttamente proporzionale all'aumentare di questa grandezza.

Per quanto riguarda le condizioni di stazionarietà, esse richiedono in ogni caso un aggiustamento nullo da parte delle imprese ($g=0$). Poiché $g=0$ è un caso escluso dalle ipotesi del modello in esame, si deve concludere che i prezzi non possono essere stazionari.

In sintesi, a parte il caso particolare esaminato dagli autori, in una economia indicizzata i prezzi saranno sempre in movimento verso l'alto: si avrà cioè sempre inflazione. Questo rende in generale non verificata la proposizione 1) degli autori. Poiché inoltre i nostri risultati sono indipendenti da considerazioni relative sia al livello di attività, sia alla frequenza degli scatti della scala mobile, le proposizioni 2) e 3) non esauriscono le caratteristiche di una tale economia.

Ma ciò ci permette di richiamare l'attenzione sul fatto, di per sé banale, che in una economia in cui l'inflazione rappresenta, come nel caso in esame, uno strumento di redistribuzione del reddito, non vi sarà inflazione solo quando una delle parti, le imprese, accetta la redistribuzione imposta dall'altra tramite la scala mobile (che, lo ricordiamo per inciso, per sua natura "rincorre" l'inflazione e non può mai "anticiparla" come, al contrario, possono fare le imprese). Ne segue che una corretta politica antinflazionistica non può non tenere conto di *tutti* gli aspetti relativi alla situazione in esame.

Roma

P. C. Padoan - M. L. Petit

[24] Nulla vieta, se i cicli sono sufficientemente lenti, che la scala mobile possa scattare prima che tutti i cicli abbiano potuto raggiungere i rispettivi punti di svolta superiori.