Verso un modello lineare di lavoro non omogeneo*

Lo schema di Leontief o il modello di Sraffa sono esempi significativi, nel campo dei modelli lineari, di analisi fondate sull'ipotesi di eterogeneità dei beni capitali e di omogeneità del lavoro. Questo articolo si propone di introdurre il caso di una forza lavoro non omogenea nell'ambito di questi stessi modelli e di esaminarne alcune prime implicazioni[1].

Nel modello proposto, in particolare, i differenti compiti, cioè le fasi in cui un processo produttivo può essere suddiviso, sono eseguiti da tipi di lavoro specializzato diversi dove il tipo di specializzazione considerato è a sua volta prodotto alla stregua di un bene. In base alla specificazione del modello è possibile ottenere come soluzione il vettore dei prezzi e dei diversi saggi di salario di equilibrio. L'ipotesi di "stretta" specializzazione del lavoro nella produzione di un bene (o, analogamente, nell'esecuzione di un compito) permette di rappresentare tale risultato in forma di matrice diagonale i cui elementi indicano, per ogni compito, il tipo di lavoro più efficiente ed il saggio di salario relativo. Questa matrice, ad elementi diversi da zero solo sulla diagonale principale, è un caso del tutto speciale di un'altra delle stesse dimensioni, i cui elementi fuori diagonale rappresentano i salari che prevarrebbero se ogni tipo di lavoro fosse applicato ad un compito diverso da quello in cui esso è il più efficiente. Questa matrice, che noi chiameremo delle produttività, rappresenta lo "spettro" dei saggi di salario efficienti e di "trasferimento" di ciascun tipo di lavoro ai compiti nei quali esso non è il più effi-

* Desideriamo ringraziare Carlo Beretta, Carlo Filippini, Tsuneo Ishikawa, Sergio Parrinello e Robert Solow per commenti e considerazioni critiche. Rimaniamo naturalmente soli responsabili per gli errori residui.

[1] Per un precedente tentativo di trattare, in un contesto differente, forza lavoro non omogenea, dal quale il presente lavoro fu originalmente stimolato, si veda: F. Modigliani-E. Tarantelli (1975), specialmente i capitoli 2 e 4.

ciente. L'esistenza di saggi di trasferimento più alti di quelli efficienti, per un qualsivoglia compito o tipo di lavoro, spinge a sua volta i lavoratori a competere gli uni con gli altri, abbassando i saggi di salario efficienti e di trasferimento, anche in condizioni di pieno impiego. Tale comportamento che porta alla determinazione di un nuovo vettore dei salari e (poi) dei prezzi di equilibrio, può ripetersi, sulla base di un processo ricursivo, sugli elementi della matrice delle produttività (calcolati di volta in volta ai nuovi prezzi di equilibrio).

Nelle tre appendici finali sono infine raccolte, per comodità del lettore: la soluzione del modello (I), una sua reinterpretazione in uno schema di ciclo vitale (II) e l'algoritmo di soluzione del meccanismo di competizione tra i diversi tipi di lavoro appena ricordato (III).

1.0 - In questo paragrafo si considera un modello lineare di produzione del tipo proposto da Leontief o Sraffa che presenta come principale caratteristica l'estensione di questi modelli concepiti per un mercato del lavoro omogeneo al caso di una forza lavoro non omogenea. Le ipotesi implicite sono comuni ad altri modelli lineari (assenza di produzione congiunta, rendimenti di scala costanti e libera concorrenza).

Nel sistema considerato la produzione di ogni bene avviene attraverso l'esecuzione di compiti, cioè delle fasi che caratterizzano il suo processo produttivo. Questi compiti sono eseguiti da differenti tipi di lavoro specializzato con l'impiego di beni.

Un processo produttivo può essere, a sua volta, suddiviso in uno o più compiti assimilabili alla produzione di beni intermedi e finali.[2]. Questa reinterpretazione permette di scrivere il nostro sistema in un modo del tutto analogo ai consueti schemi lineari di produzione. Per semplicità di esposizione, si considera il caso di n tipi di lavoro specializzato diversi ed un solo prodotto finale ottenuto portando a termine gli n compiti con una biunivoca (uno ad uno) corrispondenza tra compiti e tipo di lavoro: caso che si definisce "stretta" specializzazione.[3] L'eventuale inclusione di lavoro non specializzato equivale all'introduzione di un bene (lavoro) libero nello

[2] Quest'approccio è analogo al cosidetto metodo austriaco o neo-austriaco di trattare i beni capitali.

[3] Come sarà chiaro in seguito, un metodo alternativo potrebbe essere di partire da un'arbitraria matrice delle produttività e derivare la specializzazione dal meccanismo di concorrenza descritto più avanti.

schema di riferimento teorico, contrariamente a quanto avviene per i tipi di lavoro specializzato.

1.1 - La "produzione" di lavoro specializzato è, d'altra parte, solo formalmente analoga a quanto avviene nella teoria del capitale umano, dove il lavoro (o meglio la sua specializzazione) è esso stesso un bene capitale. La chiusura del modello è infatti, come si vedrà in seguito, del tutto diversa da quella usualmente suggerita dalla teoria del capitale umano in quanto il tasso di profitto non è nel nostro modello endogenamente derivato dalle caratteristiche tecniche di una (non specificata) funzione di produzione aggregata.

Per semplicità espositiva, si assume che il "capitale lavoro" abbia "vita infinita"[4] con efficienza costante nel tempo, il che permette di valutarlo direttamente come una rendita perpetua. Ipotesi alternative sulla produttività del lavoratore possono essere facilmente introdotte. Nell'appendice II, in particolare, si sviluppa a scopo illustrativo un modello in cui la produttività del singolo lavoratore varia nel tempo ed in cui la sua uscita dal mercato è (di conseguenza) un'incognita.

Segue la formalizzazione del modello:

$$\begin{aligned} (pA + wL)\ (1+r) &= \frac{w}{r} && (1.A) \\ (pB + w\hat{I})\ (1+r) &= p && (1.B) \end{aligned} \qquad [1.0]$$

dove A, B, L, sono matrici di ordine n; $\hat{I}$[5] è una matrice diagonale dello stesso ordine; p, w sono vettori a n componenti e r è uno scalare. In particolare:

$A = (a_{ij})$ = quantità di bene i necessaria a produrre una unità del tipo di lavoro j;

$B = (b_{ij})$ = quantità di bene i necessaria ad eseguire il compito j;

[4] O, in maniera equivalente, non c'è deprezzamento nelle abilità che un lavoratore acquisisce.

[5] $\hat{I}$ è una matrice diagonale, seguendo la nostra ipotesi di una corrispondenza biunivoca tra compiti e tipi di lavoro. Questa è tuttavia più una restrizione alla nostra definizione di compito che un'ipotesi sul lavoro. Infatti, dato un bene che richiede per la sua produzione più di un tipo di lavoro, noi possiamo introdurre beni intermedi (o fittizi), i compiti, la produzione di ciascuno dei quali richiede un solo tipo di lavoro.

$L = (l_{ij})$ = quantità di tipo di lavoro i per la produzione del tipo di lavoro j;

$\hat{l} = (\hat{l}_{ij})$ = quantità di lavoro j nell'esecuzione del compito j;

$p = (p_i)$ = prezzo dei singoli beni (compiti) i;

$w = (w_i)$ = saggio di salario del lavoro i;

r = saggio di profitto (uguale al saggio d'interesse in equilibrio).

Dalla soluzione del sistema [1.0], la cui esistenza è dimostrata nell'appendice I, si determinano i valori di equilibrio di p, w ed r.

1.2 - Il sistema [1.0] è composto di 2n equazioni in 2n+1 incognite (p_i, w_i, ed r) ma possiamo scegliere un prezzo come numerario ed esprimere i valori di equilibrio come funzioni di questo prezzo.

Si noti che il nostro sistema impiega un modo particolare di "chiudere" il modello di Sraffa[6] poiché assumiamo il lavoro prodotto al pari degli altri beni. È, d'altra parte, possibile introdurre anche lavoro non specializzato e chiudere il modello nel modo usuale, fissando esogenamente il saggio del salario del lavoro non specializzato, ad esempio al "minimo di sussistenza" di Ricardo o Marx, ovvero fissando esogenamente il saggio di profitto.

1.3 - Si è finora esclusivamente considerato l'impiego di ciascun tipo di lavoro nel compito in cui esso è il più efficiente (stretta specializzazione). In questo paragrafo ci proponiamo di derivare i saggi di salario alternativi o "di trasferimento" che prevarrebbero impiegando, ai prezzi ed ai salari di equilibrio derivati dal modello precedente, tipi di lavoro diversi da quello più efficiente in ciascun compito (trasferendo, per ripeterci, ciascun tipo di lavoro dal compito in cui esso è il più efficiente ai compiti meno efficienti).

La "matrice delle produttività", che da questa sostituzione deriva, indica i saggi di salario efficienti e di trasferimento che, ai prezzi e ai salari di equilibrio, derivati dal modello precedente, corrispondono all'impiego di ogni tipo di lavoro in ciascuno dei compiti. In questa matrice, in altre parole, sono indicati sulle righe i differenti

[6] Nel modello di Sraffa senza lavoro specializzato vi sono n equazioni in n+2 incognite (p_i,w ed r). Noi possiamo fissare il prezzo di un bene come numerario ed abbiamo ancora un grado di libertà da determinare esogenamente. Chiudere il modello significa scegliere un parametro, w od r, dall'esterno.

tipi di lavoro specializzato mentre gli elementi di ciascuna colonna (compito) indicano i saggi di salario efficienti e quelli di trasferimento per ogni tipo di lavoro.

L'ipotesi di base per questa derivazione è che la sostituzione, per ogni compito, di un tipo di lavoro meno efficiente al posto del più efficiente in quello stesso compito richiede quantità addizionali (e, più in generale, diverse) di input del lavoro meno efficiente (ad esempio, più ore lavorate) e/o di beni (ad esempio, più materie prime ecc.).

Ogni riga (w_i) della matrice delle produttività, W, che fornisce i saggi di salario di trasferimento per il tipo di lavoro, i, è ottenuta dalla soluzione di un sistema del tipo:

$$pC + w_i\hat{d}_i = w \qquad (1.1),$$

dove p, w sono i vettori, rispettivamente, dei prezzi e dei saggi di salario di equilibrio, soluzioni del sistema [1.0] e, inoltre:

$C = (c_{ij})$ = ammontare addizionale del bene i-esimo necessario a sostituire il lavoratore più efficiente j per svolgere il compito j con il lavoratore meno efficiente i. Di tale matrice C, così definita, ne esistono in numero uguale al numero dei lavoratori, cioè a i. In ciascuna di queste matrici, naturalmente, la colonna di volta in volta corrispondente al compito j e al tipo di lavoro (più efficiente) j è nulla (così per j=3 se, ad esempio, si considera w_3 in 1.1, la terza colonna di C è nulla).

$D = (d_{ij})$ = input addizionale di lavoro i richiesto per sostituire il lavoro più efficiente j nel compito j con il lavoratore meno efficiente i. La matrice diagonale $\hat{d}_i$ è ottenuta da ogni colonna j della matrice precedente D.

Da (1.1) si ottiene per ogni lavoratore i:

$$w_i = (w - pC)\,\hat{d}_i^{-1} \qquad (1.2)$$

che indica il vettore dei salari corrispondente all'applicazione del tipo di lavoro i nell'esecuzione dei vari compiti. Ne segue anche che la matrice delle produttività W è immediatamente derivabile come insieme delle righe ottenute ripetendo i volte l'operazione descritta in (1.1) e (1.2).

1.4 - Si noti che la matrice delle produttività può, a sua volta, essere interpretata come prodotto di due altre matrici. La matrice delle specializzazioni, S, in particolare, descrive per ogni lavoratore tipo il tempo di istruzione (dalla scuola elementare all'università), di apprendimento su ciascun tipo di lavoro, ecc., che caratterizza il lavoratore e può essere di fatto letta (per riga) come il suo *curriculum vitae*. (Questa matrice caratterizza, per ogni tipo di specializzazione, la composizione del capitale umano ereditata dalla storia passata).

La matrice dei pesi, M, attribuisce ai tempi di istruzione, apprendimento sul lavoro, ecc., descritti nella matrice precedente i valori (prezzi unitari di ciascuna specializzazione nei diversi compiti) necessari a rendere verificata l'uguaglianza:

$$SM = \frac{1}{r} W \qquad (1.3),$$

dove $S = (s_{iz})$ indica (sulle colonne) il tempo di istruzione, apprendimento sul lavoro, ecc., z-esimo relativo al lavoratore di tipo i-esimo (sulle righe);

$M = (m_{zi})$ indica il peso (prezzo unitario sulle colonne) attribuito al tempo di istruzione, apprendimento, ecc., per l'espletamento del compito i sulle righe (indipendentemente dal lavoratore che lo esegue), e può essere ricavata, date S e W, dalla soluzione del sistema precedente. Ovvero, assumendo che l'inversa di S esiste:

$$M = \frac{1}{r} S^{-1} W \qquad (1.4).$$

Si noti che il numero delle colonne, z, della matrice S (e delle righe della M) può comunque essere reso sufficientemente elevato da disaggregare i diversi tempi di istruzione, apprendimento, ecc., fino a renderli quantità sufficientemente omogenee da poter essere moltiplicate per i pesi, prezzi unitari, espressi per ciascun compito nella matrice M. Quest'ultima può naturalmente essere ottenuta dall'inversione della matrice S (in 1.4) solo nella misura in cui essa il numero dei lavoratori tipo (sulle righe) uguagli il numero dei tempi (omogenei) di istruzione, apprendimento, ecc., il che è in via di principio in ogni caso possibile.

1.5 - L'esistenza di saggi di salario alternativi (di trasferimento) derivati dalla precedente matrice delle produttività W, maggiori di quelli corrispondenti al compito in cui ciascun tipo di lavoro è il più efficiente crea le condizioni per la concorrenza sul salario da parte dei vari tipi di lavoro. Ciascun lavoratore tenderà, infatti, ad accaparrarsi il compito che corrisponde al saggio di salario di trasferimento maggiore, piuttosto che accettare passivamente quello in cui egli è il più efficiente.

Si noti che tale comportamento non solo si applica al caso di piena occupazione senza stretta specializzazione, come è stata da noi definita, al fine di risolvere il problema dell'assegnazione ad ogni tipo di lavoro del compito in cui quel tipo di lavoro è il più efficiente, ma anche al caso di disoccupazione, dove il meccanismo di competizione è rinforzato dall'esistenza dell'esercito di riserva.

La conseguenza immediata della concorrenza è un più basso saggio di salario per i differenti tipi di lavoro, ma il risultato finale dipende dalle ipotesi di comportamento sul meccanismo di concorrenza.

Tra le ipotesi possibili si sono individuate le seguenti:

(1) un lavoratore preferirà eseguire il compito il cui salario è più alto;

(2) nessun lavoratore può eseguire più di un compito;

(3) se con l'ipotesi (1) più di un lavoratore preferisce lo stesso compito, evento che si definisce di collisione, i lavoratori si faranno concorrenza, abbassando i saggi di salario domandati per quel compito finché la collisione fra di loro scompaia, per l'esistenza di salari alternativi maggiori in compiti diversi, ovvero per il raggiungimento del "minimo di sussistenza". È importante osservare che la soluzione di una collisione in un compito può generare collisioni indotte in altri compiti.

Poiché la trattazione è ragionevolmente complessa, essa è sviluppata nell'appendice III.

Si noti che se si definisce primo "round" il processo di derivazione della matrice delle produttività dopo la concorrenza tra i diversi tipi di lavoro, partendo da un vettore dei prezzi e dei salari di equilibrio, solo sotto ipotesi particolari il meccanismo di concorrenza è stabile dopo il primo "round". Esso può invece richiedere più "rounds".

Inoltre, i saggi di salario derivati dal primo "round" sono sostituibili in (1.B) e da esso si deriva un altro vettore dei prezzi, che inserito a sua volta in (1.1) ai nuovi salari così ottenuti porta alla determinazione di un altro vettore w e quindi ad una nuova matrice delle produttività e così via (su questo processo ci proponiamo di tornare in un lavoro successivo).

Quanto detto implica, infine, un elemento di novità aggiuntivo a quello ricordato in apertura di questo lavoro rispetto all'ormai tradizionale modello di Sraffa con una forza lavoro omogenea. In particolare la soluzione di equilibrio del vettore dei saggi di salario, dei prezzi e del tasso di profitto del nostro modello non dipende solo dai tradizionali coefficienti tecnici in (1.0.) ma anche da quelli "di spreco" che compaiono in (1.1.) e dai quali i nostri "salari di trasferimento" sono derivati.

L. Filippini - J. Scanlon - E. Tarantelli

Appendice I - *La soluzione del sistema*

In questa appendice si deriva la soluzione del sistema [1.0]:

$$\left.\begin{aligned} (pA + wL)\ (1+r) &= \frac{w}{r} \qquad (1.A) \\ (pB + w\hat{l})\ (1+r) &= p \qquad (1.B) \end{aligned}\right\} \quad [1.0]$$

Per semplificare la discussione si può riscrivere la (1.A) come segue:

$$r\ (pA + wL)\ (1+r) = w.$$

si definisca ora $M = \begin{pmatrix} rL & \hat{l} \\ rA & B \end{pmatrix}$ e $x = (w\ p)$, allora [1.0] è equivalente a:

$$(1+r)\, xM = x$$

da cui:

$$xM = \frac{1}{1+r}\, x$$

È noto che una soluzione significativa non banale del suddetto sistema omogeneo esiste se e solo se radice caratteristica (o autovalore) di M è

$$\frac{1}{1+r}.$$

Poiché M è una matrice non negativa e decomponibile, si può applicare un teorema di Frobenius.[1] Intendiamo ora mostrare che l'autovalore di modulo massimo, λ_M, di M è

$$\frac{1}{1+r},$$

il che implica il sistema ha soluzioni non negative.

Poiché, come è noto, aumentando un elemento di una matrice decomponibile non negativa, l'autovalore massimo non decresce, λ_M è una funzione continua non decrescente di r. Allora come r aumenta, gli elementi di M, e quindi λ_M, non decrescono.

Ora, come è noto, sommando gli elementi di M per riga (o in modo analogo per colonna),

$$\lambda_M \leqslant \max \sum_j m_{ij} \leqslant \max\, [(r\sum_j l_{ij} + \sum_j \hat{l}_{ij}),\ [(r\sum_j a_{ij} + \sum_j b_{ij})]$$

questo, a sua volta, implica che come r tende a zero

$$\lambda_M(r) \leqslant \max\, (\sum_j \hat{l}_{ij}, \sum_j b_{ij}).$$

[1] Si veda a questo proposito e così pure in seguito per ogni riferimento F. R. Gantmacher (1959), vol. II, cap. 13.

Poiché per processi produttivi viabili normalizzati

$$\sum_i \hat{l}_{ij} < 1 \text{ e } \sum_i b_{ij} < 1$$

ne segue che $\lambda_M(r)<1$ per un r sufficientemente piccolo.

Cosicché non soltanto, come si è visto sopra, $\lambda_M(r)$ è una funzione continua non decrescente di r, ma esiste un r sufficientemente piccolo per cui $0<\lambda_M(r)<1$.

Ora, chiaramente, $\frac{1}{1+r}$

è una funzione monotonicamente decrescente di r, e quando r = o,

$$\frac{1}{1+r} = 1.$$

Possiamo allora concludere che poiché $\lambda_M(r)$ e

$$\frac{1}{1+r}$$

sono rispettivamente, funzioni non decrescenti e decrescenti di r, esiste un $r_o>o$ tale che

$$\frac{1}{1+r} = \lambda_M(r),$$

da cui una soluzione non negativa del sistema [1.0] esiste per $r=r_o$, che, a sua volta, implica, det $\left[\frac{1}{1+r_o} I - M(r_o)\right] = 0.$

Appendice II - *Estensione del modello interpretandolo come schema del ciclo vitale.*

In questa appendice si estenderà la formalizzazione ad una interpretazione del tipo ciclo vitale della versione precedente del modello.

Il processo produttivo non ha durata di un solo periodo per poi ripetersi, come nel modello precedente, bensì di più periodi.

Si può scrivere il seguente sistema:

$$\begin{aligned} &(1+r)\ (pA+wL) = wC_1(t) &&(2.A)\\ &(pB(t)+wC_1(t)) = p\hat{d}(t) &&(2.B) \end{aligned} \qquad [2.0]$$

dove, in aggiunta ai simboli di cui già conosciamo il significato, e cioè A, L, w ed r si aggiungono:

$C_1(t) = [c_{jj}(t)]$ = matrice diagonale che indica i flussi scontati di input di lavoro j necessari alla produzione del bene j;

$B(t) = [b_{ij}(t)]$ = matrice che indica i flussi scontati di input i per la produzione del bene j nei periodi t = 1, 2...T;

$\hat{d}(t) = [d_{jj}(t)]$ = matrice diagonale che indica i flussi scontati di prodotto j nei periodi t = 1, 2...T;

T = età fisica limite dei lavoratori.

Nella precedente formulazione del nostro modello l'addestramento durava un solo periodo ed i cambiamenti di produttività dopo il primo periodo cadevano, come si usa dire, dal cielo.

Un'interpretazione più realistica imputa questi cambiamenti al risultato di addestramento sul lavoro, con eventualmente, in alcuni periodi, perdite di produttività. L'input di lavoro per ogni eventuale periodo di produzione non è più costante come nel caso del sistema [1.0]. In particolare alla fine di ogni periodo tra gli output figura anche il lavoro, perché è diverso da quello impiegato all'inizio del periodo; output che poi sarà a sua volta input all'inizio del periodo seguente fino alla massima durata fisica del lavoro. Non è tuttavia necessario registrare questi cambiamenti nella produttività dei lavoratori poiché, ciascuno di essi, apparendo come input e come output, si annullano. Questo spiega come $wC_1(t)$ in (2.A) sia la somma di flussi scontati di salari durante il ciclo vitale dei lavoratori. Analogamente è sufficiente registrare queste variazioni in (2.B), insieme al flusso scontato di input $pB(t)$ che dà luogo al flusso di prodotto $p\hat{d}(t)$.

Si può riscrivere [2.0] nel modo seguente:

$$\begin{aligned} &(1+r)\ (pA+wL) = wC_1(t)\\ &(1+r)\left[\frac{1}{1+r}\, pB(t) + \frac{w}{1+r}\, C_1(t)\right] = p\hat{d}(t) \end{aligned} \qquad [2.1]$$

Nostro scopo è ora di dimostrare l'esistenza di soluzioni del sistema [2.1], dati $[A,L,C_1(t),\ B(t),\hat{d}(t)]\geq o$, per qualche valore fissato della durata del capitale lavoro, T.

Se noi definiamo:

$$M = \begin{pmatrix} LC_1^{-1} & \frac{1}{1+r}\, C_1\hat{d}^{-1} \\ AC_1^{-1} & \frac{1}{1+r}\, B\hat{d}^{-1} \end{pmatrix}, \quad v = (w\ \ p) \ \text{ e } \ \varrho = \frac{1}{1+r}$$

Il sistema [2.1] può essere riscritto nel modo seguente:

$$\frac{1}{\varrho} v M = v \qquad [2.2]$$

Si può dimostrare che una soluzione esiste se e solo se M ha ϱ come autovalore o analogamente M ha una radice positiva inferiore di uno.

Proposizione: un sistema del tipo

$$\frac{1}{\varrho} v M = v, \text{ ha una soluzione per } \varrho \in (0,1],$$

dove:

(i) M è una funzione di ϱ e $M(\varrho)>o$ per $\varrho \in (0,1]$;

(ii) la radice dominante di M, λ_M, è una funzione continua di ϱ;

(iii) $vM(1) \leq v$ per le note condizioni di accettabilità o productività del sistema.

Si deve dimostrare che $\lambda_M(\varrho)=\varrho$ per qualche $\varrho \in (0.1]$.

Si possono distinguere due casi:

Caso 1: per tutti i $\varrho \in (0,1]$ si abbia $\lambda_M(\varrho) \leq 1$.

Caso 2: per qualche $\varrho_o \in (0,1]$, sia $\lambda_M(\varrho_o)>1$.

Sia $f(\varrho_o)=\lambda_M(\varrho_o) - \varrho_o$, allora $f(\varrho_o)>o$, mentre $f(1)=\lambda_M(\varrho_1) - 1<o$. Per il teorema di Bolzano sulle funzioni continue si ha: $f(\varrho_1)=o$ per qualche $\varrho_1 \in [\varrho_o, 1]$.

Allora $\lambda_M(\varrho_1)=\varrho_1$, per $\varrho_1 \in [\varrho_o, 1] \subset (0,1]$.

In modo simultaneo ai valori di equilibrio dei prezzi e dei saggi di salario si determinano le vite economiche dei vari capitale lavoro, cioè il periodo di uscita dal mercato dei vari lavoratori.

Appendice III - *Il meccanismo di concorrenza tra i lavoratori*

3.1 - In questa appendice si discute l'effetto della concorrenza tra i lavoratori in termini dei loro salari relativi. Tra tutti gli schemi possibili si è scelto di modellare questa competizione come un tipo di asta. Prima però di soffermarci sui suoi effetti, è opportuno definire chiaramente le "regole" dell'asta.

Si ipotizzano le seguenti, per ripetere quanto già detto nel testo:

(1) un lavoratore preferirà adempiere un compito per il quale il suo salario è il più alto;

(2) due compiti non possono essere eseguiti dallo stesso lavoratore;

(3) definita collisione tra due lavoratori come la situazione in cui essi preferiscono lo stesso compito, i lavoratori si fanno concorrenza in caso di collisione, abbassando simultaneamente di uno stesso ammontare il salario domandato per quel compito fino a che la collisione è scomparsa, cioè uno dei due lavoratori ora preferisce un compito differente.

3.2 - Partendo da queste regole e dalla matrice delle produttività, come risultato del processo di concorrenza si possono determinare i saggi di salario dei lavoratori per ogni singolo "periodo" che costituisce il processo ricursivo discusso nel testo.

In particolare, per ogni lavoratore e per ogni compito, per il quale nella matrice delle produttività, il lavoratore ha un salario maggiore di quello che ha nel compito in cui egli è il più efficiente, si abbassi il saggio di salario della diferenza tra salario efficiente e salario di trasferimento finché ogni forma di collisione sia eliminata.

Si può esprimere quanto detto sopra nel modo seguente:

Sia $\pi(i)$=il compito in cui il lavoratore i è il più efficiente.

Per ogni lavoratore i=1a n e per ogni compito j=1a n:

se ${}_tW_{i\pi(j)} < {}_tW_{ij}$ al "tempo" t del nostro processo ricursivo (per t=1,2...), allora calcolare per tutti i lavoratori k=1a sulla colonna j:

$${}_{t+1}W_{kj} = {}_tW_{kj} - ({}_tW_{ij} - {}_tW_{i\pi(i)});$$

e così via.

3.3 - Sia, ad esempio, la seguente matrice delle produttività al "tempo" t.

	C_1	C_2	C_3
L_1	3	4	5
L_2	2	4	6
L_3	1	3	8

dove L_i indica il lavoratore e C_i il compito corrispondente.

Il lavoratore L_1 ha salari di trasferimento nei compiti C_2 e C_3 maggiori del suo salario più efficiente, pari a tre unità di conto. Secondo l'algoritmo appena specificato il processo competitivo su C_2 porta alla seguente situazione:

per L_1: $4 - (4 - 3) = 3$;

per L_2: $4 - (4 - 3) = 3$ e

per L_3: $3 - (4 - 3) = 2$.

Analogamente su C_3 il processo competitivo porta alla seguente situazione:

per L_1: $5 - (5 - 3) = 3$;
per L_2: $6 - (5 - 3) = 4$ e
per L_3: $8 - (5 - 3) = 6$.

La matrice delle produttività che risulta da questo (iniziale) processo competitivo può essere allora riscritta nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Si noti che mentre L_1 e L_3 non hanno convenienza a trasferirsi verso compiti diversi da quelli, rispettivamente, C_1 e C_3, nei quali sono più efficienti, L_2 ancora preferisce C_3.

Analogamente a quanto appena specificato il nostro processo competitivo porta alla seguente situazione:

per L_2: $4 - (4 - 3) = 3$;
per L_1: $3 - (4 - 3) = 2$ e
per L_3: $6 - (4 - 3) = 5$.

Ovvero:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

dove (assumendo di avere di fatto spinto il processo competitivo per L_1 in C_2 e per L_2 in C_3 a $2,\overline{9}$) i valori di equilibrio dei saggi di salario che risultano dal processo competitivo appena delineato possono essere sostituiti in (1.B) per ottenere i nuovi prezzi di equilibrio del nostro sistema. Questi ultimi e i valori dei saggi di salario derivati dal processo competitivo appena descritto (che in questo caso appaiono sulla diagonale principale della matrice di cui sopra) possono essere ora sostituiti in (1.1) per derivare la nuova matrice delle produttività sulla quale un analogo processo competitivo può essere derivato.

Si noti, infine, che l'introduzione di un esercito di riserva può essere esplicitata nella matrice precedente attribuendo ad uno dei tre compiti un saggio di salario al "minimo di sussistenza".

F. - S. - T.

BIBLIOGRAFIA

(1) F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, 2 voll., Chelsea Publ. Co., New York, 1959.
(2) W. W. Leontief, *The Structure of American Economy 1919-1939*, 2ª ed., Oxford University Press, New York, 1951.
(3) F. Modigliani, E. Tarantelli, *Mercato del lavoro, distribuzione del reddito e consumi privati*, Il Mulino, Bologna, 1975.
(4) J. Schwartz, *Lectures on Mathematical Methods in Analytical Economics*, Gordon « Breach, New York, 1961.
(5) P. Sraffa, *Produzione di merci a mezzo di merci*, Einaudi, Torino, 1960.