

Programmazione lineare e meccanizzazione della banca

1. — I recenti sviluppi tecnologici nel campo della comunicazione ed elaborazione di informazioni offrono importanti applicazioni al lavoro di banca, sotto forma di particolari innovazioni tecniche o addirittura di nuovi metodi semi-automatici, che a certe condizioni rendono possibili notevoli risparmi di costi ed un miglioramento dei servizi. In rapporto a ciò la direzione della Banca si trova di fronte alle seguenti alternative: a) mantenere inalterati gli attuali sistemi di lavoro, b) introdurre immediatamente o gradualmente nel tempo un nuovo metodo od una combinazione di nuovi metodi, che impieghino macchine più moderne, c) introdurre soltanto quelle nuove macchine, ed in quantità tali, che consentano un immediato miglioramento dei sistemi di lavoro ed allo stesso tempo possano venire integrate con macchine più efficienti, che si prevede verranno prodotte in futuro, riducendo al minimo il costo di adattamento. Le decisioni su tipo, grado e ripartizione nel tempo della meccanizzazione sono prese dalla direzione sulla base dei risultati di esperimenti in altre banche e di stime approssimative di costi, qualità dei servizi e sviluppo della banca, tenendo conto della limitazione imposta dalla misura dei fondi disponibili.

Nel presente articolo si dimostra come questo importante problema di programmazione possa essere impostato in forma matematica con ogni possibile dettaglio e condizione e possa avere una soluzione (praticamente) esatta, che rende minimi i costi per un predeterminato periodo di tempo. Naturalmente la soluzione è esatta soltanto se i dati del problema sono precisi. Tuttavia, se gli errori stimati dei dati non sono rilevanti, nella maggior parte dei casi si può ancora aver fiducia nella soluzione come guida per la direzione della banca nella programmazione. È interessante osservare che l'impostazione matematica qui descritta, richiedendo certi dati precisi e dando una soluzione

« automatica » che indica le decisioni più economiche, sposta la maggior parte del lavoro e della responsabilità della programmazione dai maggiori dirigenti ai contabili dei costi ed ai tecnici, e produce inoltre un'analisi coordinata del funzionamento della banca. Ambedue questi risultati sono di per sé desiderabili.

Questa impostazione del problema è basata sul metodo della programmazione lineare, uno strumento analitico molto flessibile che ha trovato numerose applicazioni dopo la guerra, specialmente negli Stati Uniti, in diversi settori: economia, tecnologia industriale, trasporti, logistica ecc. (1) Il nome stesso del metodo indica la sua ipotesi fondamentale di linearità, la quale significa che si assume che tutti i fattori del problema siano connessi da relazioni molto semplici, tali da poter essere rappresentate da linee rette in ordinari diagrammi. Alle limitazioni delle relazioni lineari, che spesso sono un'approssimazione a schemi più aderenti alla realtà, si applicano le considerazioni largamente accettate che in generale tale ipotesi non ha un effetto sostanziale sui risultati e che in molti casi — anche se si trovassero un'impostazione non lineare più realistica ed anche un metodo di soluzione — il piccolo guadagno in precisione dei risultati così ottenuti non giustificerebbe il maggior volume di calcoli che sarebbe necessario, e d'altra

(1) In materia si segnalano particolarmente i seguenti contributi:

GEORGE B. DANTZIG, *Maximization Subject to Inequalities* ed altri contributi, nel volume curato da T. C. KOOPMANS, *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission No. 13, New York, J. Wiley & Sons, 1951.

MARSHALL K. WOOD, GEORGE B. DANTZIG, *Programming of Interdependent Activities*, in « *Econometrica* », Luglio-Ottobre 1949.

A. CHARNES, W. W. COOPER, A. HENDERSON, *An Introduction to Linear Programming*, New York, John Wiley & Sons, 1953.

R. DORFMAN, *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm*, Berkeley, University of California Press, 1951.

parte vi sarebbero, presumibilmente, maggiori probabilità di errori.

Le decisioni su cambiamenti dei sistemi di lavoro nella banca devono essere naturalmente prese tracciando un programma su un periodo di qualche anno. Il lettore potrebbe obiettare che non sarebbe ragionevole legare la direzione della banca per qualche anno ad una soluzione che probabilmente dopo un po' di tempo diverrebbe inefficiente per il verificarsi di variazioni di condizioni tecnologiche e discrepanze fra i previsti e gli effettivi volumi di operazioni, anche se era inizialmente una soluzione ottima. In realtà, la programmazione lineare — ed in generale ogni forma di pianificazione, se fatta bene — dovrebbe venire soggetta a piuttosto frequenti revisioni, per essere adattata a mutate condizioni, sebbene ciascuna soluzione copra un periodo di alcuni anni per tener conto di tutti gli elementi rilevanti, noti o previsti a quel tempo. Potrebbe essere anche utile fare un'indagine confrontando soluzioni relative allo stesso periodo, ma calcolate per differenti ipotesi intorno a metodi, previsioni di volumi di operazioni e fondi disponibili.

2. — Iniziamo la descrizione dell'impostazione del problema proposta qui con l'esempio contenuto nella tabella inserita a pagg. 3-4. È stata scelta questa forma di esposizione per maggiore chiarezza ed anche perchè la tabella rappresenta lo schema di qualsiasi applicazione, naturalmente con le modifiche richieste da ogni caso particolare. Le cifre della tabella sono immaginarie e probabilmente non hanno proporzioni realistiche, a parte quelle loro caratteristiche che sono rilevanti per illustrare il problema. Le cifre sono rimpiazzate da asterischi, quando non è necessario precisarle ai fini dell'esposizione. Per semplicità sono state attribuite alla nostra banca immaginaria tre sole funzioni (conti correnti, crediti commerciali e lettere di credito), diversi tipi di macchine ed impiegati specializzati in operazioni differenti sono stati raggruppati in grandi classi; sono stati considerati tre diversi metodi o procedure di lavoro (che si possono applicare uno alla volta od in qualsiasi combinazione); la programmazione si estende soltanto su un periodo di quattro anni. Ogni applicazione pratica comprenderebbe invece un maggior numero di funzioni e pure diversi tipi di macchine, di impiegati e di locali, e si estenderebbe su un periodo

di tempo più lungo, forse anche prendendo entro quel periodo intervalli più brevi di un anno.

Sul lato sinistro della tabella sono indicati funzioni della banca, fattori di produzione, fondi disponibili per miglioramenti tecnici, e costi; in alto sono indicate tutte le possibili attività della banca: livelli previsti di raccolta e operazioni, differenti metodi produttivi, acquisto, immagazzinaggio e vendita di macchine, preparazione e licenziamento di impiegati, ecc. Le prime quattro colonne della tabella contengono i dati iniziali e le condizioni che devono essere soddisfatte nel periodo di quattro anni. Supponiamo che la programmazione venga effettuata alla fine del 1955. Leggendo dall'alto in basso, la prima colonna indica che per il 1956 sono previsti una raccolta di conti correnti per una media di \$ 853 milioni, crediti commerciali per \$ 581 milioni, e lettere di credito per \$ 124 milioni. Queste cifre sono ottenute con ricerche di mercato, proiezione di tendenze di lungo periodo, ed altri metodi di previsione. All'inizio del 1956 la banca avrà 893 macchine di ufficio — in una applicazione pratica sarebbe consigliabile suddividere questo gruppo eterogeneo in macchine da scrivere, macchine contabili ecc. — un impianto completo a schede perforate, locali con una superficie di 292.000 piedi quadrati, 2.327 impiegati d'ordine, 187 funzionari ed un fondo di riserva di \$ 6,5 milioni per il miglioramento dei metodi di lavoro. Le seguenti tre colonne mostrano i livelli di operazioni previsti per i prossimi tre anni e previsti incrementi del fondo di riserva di (\$ 1,5 milioni nel 1957 ecc.).

La quinta colonna indica le quantità di fattori necessari per \$ 10 milioni di conti correnti, applicando il primo metodo di lavoro. Per esempio, occorrono una superficie di 810 piedi quadrati e 16,41 impiegati d'ordine. Queste sono le cifre nelle righe segnate con « in » (entrata). Le cifre nelle righe segnate « ex » (uscita) indicano ciò che rimane alla fine dell'anno. La riduzione di macchine da 5 a 4,43 e di superficie dei locali da 1.810 a 1.600 piedi quadrati rappresenta il deprezzamento causato da deterioramento ed invecchiamento di macchine e fabbricati e comprende il mantenimento in buone condizioni e le riparazioni — presi come frazioni della capacità di lavoro dei fattori — mentre la riduzione del numero di impiegati d'ordine da 16,41 a 13,19 è il risultato dell'avvicendamento — dimissioni, licenziamenti per scarso rendimento, che in questo esempio sono il 20 1/3

circa l'anno. L'ultima cifra di \$ 92.000 dà il totale medio degli stipendi degli impiegati d'ordine (\$ 2.400 l'uno) e dei funzionari (\$ 6.000 l'uno) che amministrano \$ 10 milioni di conti correnti in un dato anno. Gli stipendi comprendono i contributi del datore di lavoro ad un fondo di pensione, assicurazioni sociali ecc. Essi soli appaiono sulla riga dei costi sotto le colonne dei metodi di lavoro, perchè i costi di tutti i fattori rilevanti, ad eccezione del personale, sono indicati nelle colonne a destra. Si noterà che non vengono menzionati i dirigenti e molti fattori essenziali che costituiscono importanti elementi di costo, come posta, telefono e telegrafo, cancelleria, spese di viaggio, azioni legali ecc. Il motivo è che nel nostro esempio si è supposto che il numero dei dirigenti non subisca variazioni se vengono impiegati nuovi metodi produttivi o se i livelli di operazioni della banca variano entro certi limiti piuttosto larghi, e che le quantità usate dei suddetti fattori siano in proporzione diretta ai livelli di operazioni della banca indipendentemente dai metodi di lavoro che sono stati scelti. In queste ipotesi, il numero e gli stipendi dei dirigenti e la quantità ed i costi di questi altri fattori sono irrilevanti per il nostro problema. In generale tutti i fattori che non sono influenzati dalla scelta di un particolare programma devono essere esclusi dall'analisi. Non vengono considerate nemmeno la pubblicità ed altre attività di sviluppo della raccolta ecc. perchè esse influenzano semplicemente le previsioni dei livelli di operazioni, e non sono soggette a decisioni sulla organizzazione tecnica della banca.

Le successive colonne relative ai metodi di lavoro sono analoghe. Si suppone che i tre metodi impiegano progressivamente più macchinario e le cifre mancanti dovrebbero riflettere questa situazione: il secondo metodo usa una proporzione maggiore di impianti a schede perforate che non il primo, e soltanto il terzo metodo usa calcolatrici elettroniche. Probabilmente il secondo e terzo metodo impiegheranno una proporzione minore di impiegati d'ordine, di locali ed anche di macchine d'ufficio. Si suppone che il terzo metodo sia approssimativamente noto attualmente ma sia applicabile, in base a previsioni attendibili, soltanto nel terzo anno del piano di meccanizzazione. Esso serve a mostrare come nelle decisioni sui miglioramenti dei sistemi di lavoro si debba tener conto di previste innovazioni, e del conseguente rischio che queste rendano superati i metodi attuali.

Le restanti colonne descrivono le attività di acquistare, immagazzinare e vendere macchinario, acquistare e vendere locali e lasciare locali inutilizzati, preparare e licenziare personale, posporre spese per nuovo macchinario e nuovi locali. Nella terza di queste colonne, ad esempio, la cifra di \$ 50 rappresenta il ricavo medio dalla vendita di una macchina da scrivere usata, che viene accreditato al fondo di riserva ed appare anche come costo negativo. Analogamente, la colonna intestata «preparazione di impiegati d'ordine» mostra che in media si valuta che l'apprendistato di un impiegato d'ordine assorba un quinto del lavoro di un anno di un impiegato esperto. Il costo dell'apprendistato di un impiegato sarà quindi di \$ 480, che sono un quinto dello stipendio annuo di un impiegato. I coefficienti di attività di immagazzinaggio (e di mancata utilizzazione dei fabbricati) comprendono il deprezzamento, ad esempio $3\frac{1}{3}$ per i fabbricati. Il costo di tenere locali inutilizzati sarà negativo — cioè un reddito — se questi locali vengono affittati a terzi. Il prezzo di acquisto di macchinario include il costo dell'installazione, che è elevato per impianti a schede perforate ed elettronici. La tabella può venire facilmente modificata nel caso che si debba tener conto di macchinario e locali presi in affitto.

3. — Il problema della programmazione più efficiente è di mantenere al minimo il totale dei costi scontati nel periodo di quattro anni, soddisfacendo tutte le condizioni — attuali e previste — indicate dalla tabella, compresa la condizione che non vi possono essere attività negative. Anche nello schema del nostro esempio molto semplificato il problema è piuttosto complicato e, se i dati non sono tali per cui la soluzione è evidente ad un semplice esame della tabella, per la soluzione occorre un metodo matematico. La soluzione determina il livello di ciascuna colonna, che rappresenta un'attività della banca, ad eccezione delle prime quattro colonne che sono fisse. Il livello di ciascuna attività è espresso da una variabile $x^{(t)}$ in cima alla colonna, che moltiplica ciascun coefficiente di entrata della colonna; la stessa variabile, presa all'intervallo precedente, $x^{(t-1)}$, moltiplica ciascun coefficiente di uscita di quella colonna, perchè l'uscita dell'anno scorso è l'entrata di questo anno. Assumendo per esempio che nella soluzione ottima si applichi soltanto il secondo metodo di lavoro ai conti correnti nel secondo anno del pro-

gramma, il livello di questa attività sarà dato da $x_4^{(2)} = x_4^{(2)} = 89.000$. Cioè la banca avrà una capacità di amministrare \$ 89 milioni di conti correnti; impiegherà per questa attività $2,68 \times 89$ macchine di ufficio, $0,0033 \times 89$ impianti a schede perforate; verranno adibiti a questa attività $0,33 \times 89$ funzionari, ecc. In questo secondo anno il totale degli stipendi del personale addetto ai conti correnti sarà \$ 37.000×89 . Il lettore che ha soltanto un interesse generale nel presente articolo può omettere la seguente trattazione tecnica in caratteri minuti.

In termini matematici, questo problema è la minimizzazione di una funzione lineare di variabili non negative soggetta ad un sistema di equazioni lineari alle differenze finite. Si può provare che esiste un'unica soluzione finita. Il problema è scritto come segue nella compatta notazione delle matrici, indicando con a ciascuna dei coefficienti di entrata nella tabella — lasciando fuori la riga dei costi — e con b ciascuna colonna dei coefficienti di uscita, con lo stesso indice di x in cifra alla colonna:

$$\sum_i e^{it} (9.2 x_i^{(t)} + 2.9 x_i^{(t)} + \dots + 0.03 x_{10}^{(t)} + \dots - 0.03 x_{28}^{(t)}) - e^{it} \sum_j c_j x_j^{(t)} = \text{Min.}$$

soggetto alle condizioni

$$a_0^{(t)} + a_1 x_1^{(t)} + \dots + a_{28} x_{28}^{(t)} = b_1 x_1^{(t-1)} + \dots + b_{28} x_{28}^{(t-1)}$$

$$e \quad x_j^{(t)} \geq 0$$

$$(t = 1, 2, 3, 4)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 28)$$

Dove i è il saggio di sconto, $\sum_j c_j x_j^{(t)}$ indica i costi totali dei fabbricati e del macchinario alla fine del periodo del piano — che sono una funzione lineare dei livelli di attività nell'ultimo intervallo di tempo — $a_0^{(t)}$, per $t = 1$, è la prima colonna della tabella; per $t = 2$, è la seconda colonna, ecc.; a_i è la colonna dei coefficienti ($-1.000, 0, 0, 5, 0, 0011, 0, 1, 81, 16, 41, 0, 73, 0$); b_1 è la colonna dei coefficienti ($0, 0, 0, 4, 43, 0, 0010, 0, 1, 60, 13, 19, 0, 69, 0$); ecc. Le equazioni affermano che la quantità di ciascuna classe di operazioni e di ciascun fattore di produzione della banca in qualsiasi intervallo di tempo (uscita) è uguale alla quantità riportata nell'intervallo seguente (entrata) più una costante data dalle colonne delle condizioni nella tabella; e le spese per nuovo macchinario e nuovi fabbricati non devono superare i fondi disponibili in ogni intervallo di tempo.

Alcuni fattori, come impianti e schede perforate ed elettronici, hanno grandi unità indivisibili. Tut-

tavia, la soluzione in generale indicherà frazioni di queste unità. Il miglior modo di trattare questa complicazione è di esplorare la regione intorno alla soluzione nei punti dati da tutte le possibili combinazioni degli integrali di questi fattori che sono più vicini ai valori frazionati determinati dalla soluzione. Per esempio, se la quantità di completi impianti e schede perforate indicata dalla soluzione è 2, 6, occorre confrontare i costi totali nelle due ipotesi che si impieghino due o tre impianti, variando i livelli di attività in modo da soddisfare tutte le condizioni. Se la soluzione determina anche una quantità di 0,73 calcolatrici elettroniche, si dovranno confrontare i costi totali per le quattro combinazioni di due o tre impianti a schede perforate da una parte, e zero od una calcolatrice elettronica dall'altra. In generale queste combinazioni da esplorare sono 2^n , se vi sono n fattori con grandi unità. Naturalmente, fattori con un grande numero di unità indivisibili, come gli impiegati, si possono arrotondare all'intero successivo senza diminuire sensibilmente l'efficienza della soluzione.

Geometricamente, le condizioni del problema — distuguaglianze lineari — definiscono un poliedro nell'iperspazio; un vertice del poliedro dà i costi minimi. I metodi efficienti di calcolo mirano a seguire il sentiero più breve per arrivare a questo vertice, passando lungo gli spigoli del poliedro. Quando sono presenti fattori con grandi unità indivisibili, la soluzione si sposta dal vertice dei costi minimi a un punto su uno spigolo di questo vertice, che dà i costi minimi soggetti alle ulteriori condizioni che non si possono avere frazioni di questi fattori.

4. — Un metodo generale di soluzione, che comporta una quantità relativamente piccola di calcoli, fu trovato da Dantzig ed è noto sotto il nome di metodo del semplice. I calcoli sono programmati in forma semplice e ripetitiva con un sistema di controlli. Chiamando x^t il vettore dei livelli di attività $x_j^{(t)}$, ed indicando con A la matrice dei vettori a_j ; e con B la matrice dei vettori b_j , si può scrivere il sistema di equazioni lineari alle differenze finite:

$$\begin{aligned} Ax^{(1)} &= -a^{(1)} \\ -Bx^{(1)} + Ax^{(2)} &= -a^{(2)} \\ -Bx^{(2)} + Ax^{(3)} &= -a^{(3)} \\ \dots & \\ -Bx^{(T-1)} + Ax^{(T)} &= -a^{(T)} \end{aligned}$$

dove T è l'ultimo intervallo di tempo nel periodo del piano. Nel nostro esempio le matrici A e B sono di ordine 10×28 , ma in ogni applicazione pratica saranno più grandi, forse di ordine 15×40 . Assumendo che il programma si estenda su un periodo di sei anni, la matrice dell'espressione

suesposta sarà di 90×240 od anche maggiore. La soluzione per una matrice di queste dimensioni con il metodo del semplice comporta una grande quantità di calcoli, pur considerando che questi sono molto semplificati dalla particolare struttura della matrice, che ha submatrici soltanto lungo la diagonale.

Le operazioni di calcolo assorbirebbero probabilmente oltre 2.000 ore di lavoro, se effettuate con il solo aiuto di una calcolatrice elettrica da tavolo. Si ritiene che lo stesso lavoro potrebbe venire effettuato dalle più moderne, grandi calcolatrici elettroniche digitali in circa quattro ore. Almeno una società americana, che vende i servizi di queste

calcolatrici in base al numero di ore dell'impiego, ha già preparato le istruzioni da dare alla macchina per la soluzione di problemi di programmazione lineare e potrebbe trovare la soluzione del presente problema con un costo di circa \$ 2.000, senza il lungo ritardo e le ulteriori spese che sono comportati dal lavoro di impostazione per problemi alla cui soluzione la calcolatrice elettronica non sia ancora stata applicata. Se i dati del problema non variano molto sino al tempo in cui si effettua la revisione del piano, il lavoro compiuto in precedenza potrebbe venire utilizzato per ridurre il volume di calcoli. In tal caso, una calcolatrice da tavolo sarebbe forse adeguata.

PIETRO CASTIGLIONI