

# Teoria, mode e bizzarrie dei CCT

## 1. Introduzione

Il Certificato di Credito del Tesoro rappresenta un caso complesso per origini, preziosità tecniche e storia.

Il progetto originario del CCT è stato motivato da esigenze di gestione del debito pubblico; è un esempio classico di innovazione finanziaria, realizzato su base "sperimentale", precorrendo i tempi della teoria.<sup>1</sup>

Il titolo è nato, ed è stato accettato nel mercato, come un titolo *centauro*:<sup>2</sup> titolo a breve termine per quanto riguarda condizioni di rendimento e di rischiosità, con lunga scadenza. All'investitore viene garantito un contratto a lungo termine, ma in linea con i rendimenti a breve (rilevati sul mercato primario dei BOT); ne deriva il vantaggio di una gestione "automatica" (un *quasi roll-over* sul BOT di riferimento) del capitale investito.

Quando il titolo è valutato come oggetto di transazione, una fisionomia bivalente emerge anche dal punto di vista delle componenti di reddito: tra mercato primario, ove vengono fissati i livelli delle cedole, e mercato secondario, ove viene fissato il prezzo di scambio.

Dal punto di vista tecnico, l'indicizzazione delle cedole ha un effetto stabilizzante sull'andamento del corso del titolo; la logica (e l'efficienza) del meccanismo di stabilizzazione è basata sull'unicità della struttura dei tassi d'interesse che entra nella determinazione delle cedole e del corso; l'entità dell'effetto della stabilizzazione non è

---

<sup>1</sup> Sul ruolo del CCT nella politica del debito pubblico, cfr. SALVEMINI (1992a).

<sup>2</sup> L'immagine è di SPAVENTA (1988).

sempre facile da misurare, data la complessità dei meccanismi d'indicizzazione. Nel processo di determinazione del prezzo di mercato (quotazione) oltre alle proprietà tecniche del corso hanno peso gli effetti delle frizioni (quelle che tradizionalmente sono considerate anomalie, rispetto all'ipotesi tecnica di mercato perfetto) e i fattori aggiuntivi indotti da fonti d'incertezza diverse dal tasso d'interesse (crisi di credibilità dell'emittente, perdita di potere di acquisto rispetto ai mercati esteri, una non meglio precisata illiquidità).

Per i titoli indicizzati sembrava potesse valere la definizione di "banconota con cedola",<sup>3</sup> in particolare, le autorità monetarie avevano segnalato che i CCT «sono facilmente convertibili in moneta», poiché l'indicizzazione (garantendo stabilità dei corsi) avrebbe limitato le oscillazioni delle quotazioni e quindi avrebbe mantenuto basso il rischio di perdita in conto capitale. Più che una diagnosi tecnica, l'osservazione sulla stabilità delle quotazioni aveva quindi il significato di un'ipotesi o di un auspicio sulla qualità del mercato: presupponeva che gli operatori avessero una percezione corretta (anche in senso quantitativo) delle proprietà del titolo, che non sarebbero stati significativi gli effetti di disallineamento tra mercato primario e mercato secondario, che sarebbero state trascurabili le situazioni di illiquidità (sul mercato secondario).

La storia dell'andamento delle quotazioni segnala l'inefficacia del meccanismo d'indicizzazione nella protezione dei prezzi: ha fatto apparire i CCT «in qualche momento soggetti a un rischio di perdite in conto capitale non dissimile da quello dei titoli a tasso fisso»,<sup>4</sup> ancora recentemente, si è avuto motivo di notare che «sul mercato secondario l'indicizzazione delle cedole non ha impedito che il corso medio dei CCT subisse le stesse variazioni di quello dei titoli a reddito fisso».<sup>5</sup>

Le "difficoltà profonde" in cui si sono trovati i CCT non possono essere usate come argomento per screditare la preziosità tecnica del progetto d'indicizzazione; sono piuttosto il segno di una percezione del titolo (da parte degli operatori) non sempre adeguata alla complessità dei suoi significati finanziari e, in generale, di una non efficiente gestione dei mercati (da parte dell'autorità), per quanto riguarda sia l'azione diretta (politiche di emissione), sia l'attività di

---

<sup>3</sup> BANCA COMMERCIALE ITALIANA (1984), p. 4.

<sup>4</sup> BANCA COMMERCIALE ITALIANA (1988), p. 10.

<sup>5</sup> BANCA D'ITALIA (1991), p. 237.

sostegno all'efficienza tramite il controllo dei regolamenti e dell'informazione pubblica.

Dal comportamento del Ministero del Tesoro è risultata spesso indecisione sul ruolo da attribuire allo strumento nell'ambito della politica di gestione del debito; vi è stato un atteggiamento mutevole verso le caratteristiche tecniche che influiscono direttamente (regola per il calcolo delle cedole, trattamento fiscale) o indirettamente (modalità delle aste dei BOT di riferimento) sulla qualità dell'indicizzazione: per cui il mercato si è trovato un gran numero di titoli tutti diversi denominati CCT.<sup>6</sup>

Dal punto di vista delle tecniche di analisi finanziaria e degli schemi di gestione del portafoglio, l'atteggiamento metodologico verso i CCT appare generalmente confuso. Sebbene i modelli stocastici di struttura per scadenza dei tassi d'interesse (classificati nella cosiddetta *new term structure theory*) consentano d'impostare schemi di valutazione di titoli indicizzati che tengano conto delle caratteristiche aleatorie del contratto, ancora oggi la pratica dei CCT non è stata confortata da un quadro teorico di riferimento ufficialmente accreditato.

## 2. Modelli di mercato e mode di gestione

La diffusione di contratti intrinsecamente aleatori (indicizzati e opzioni, per i quali non è noto il flusso di cassa che sarà generato) ha costituito, negli anni settanta, un punto di crisi per la teoria tradizionale, basata sull'ipotesi di certezza, e ha avviato un intenso periodo (*golden decade*) di rifondazione dei metodi dell'analisi finanziaria, ispirata alla logica del probabilismo.<sup>7</sup>

---

<sup>6</sup> La segmentazione delle emissioni fu considerata una delle cause di crisi del CCT dal Comitato Consultivo per il Debito Pubblico (MINISTERO DEL TESORO, 1989).

<sup>7</sup> Secondo Merton la rivoluzione di metodo avvenuta negli anni settanta ha seguito «l'onda delle innovazioni finanziarie che hanno caratterizzato il mercato». Il segno di rottura con la tradizione fu «lo strumento matematico delle probabilità continue à la Norbert Wiener e à la Kiyoshi Ito. Immediatamente, ciò che aveva rappresentato una complessa approssimazione divenne una bella, semplice verità» (Samuelson). L'effetto della teoria sui mercati è stato in alcuni casi davvero notevole (come per l'*option pricing*): per una sorta di naturale connessione tra tecniche formali e significati economici, per la capacità (o fortunata coincidenza) di non confondere «il rigore in senso matematico con il rigore in senso economico» (Merton). Per citazioni e approfondimenti cfr. MERTON (1990), DUFFIE (1992) e la prefazione di Samuelson a Merton.

La nuova teoria della struttura per scadenza dei tassi d'interesse è uno degli esiti caratteristici di questo decennio d'oro; del rinnovato punto di vista richiama tutti i tratti qualificanti, dalle tecniche di calcolo stocastico alla logica economica di riferimento.

La nuova teoria sviluppa formalmente le relazioni tra tassi d'interesse e stati dell'economia; è costruita su tre vincoli di base che condizionano il sistema dei prezzi: utilizza l'argomento di arbitraggio, sfrutta l'ipotesi di ottimalità (*single-agent optimality*) e la condizione di equilibrio di mercato. Nell'ambito di questa impostazione, i CCT sono classificati tra i contratti *interest rate sensitive (irs)*, nel senso che il loro corso dipende "in modo essenziale" dalla struttura per scadenza dei tassi d'interesse; sono classificati anche titoli derivati (*derivative*), poiché il flusso di cedole che generano è funzione del livello dei tassi di interesse osservati o, da un altro punto di vista, perché sono "replicabili" con combinazioni (portafogli) di altri titoli. Per la loro valutazione è necessario quindi fare riferimento a un modello di mercato: i prezzi dei singoli titoli vanno definiti all'interno del sistema dei prezzi, in funzione delle variabili di stato dell'economia, con vincoli di consistenza (argomento di arbitraggio) per garantire che la replicabilità del titolo non consenta profitti privi di rischio.<sup>8</sup>

Con riferimento a BOT, BTP, CCT e CTO<sup>9</sup> è possibile e può essere significativo specificare schemi di valutazione basati su modelli stocastici di mercato, dove il tasso d'interesse a breve sia l'unica variabile di stato. Le quotazioni dei BTP costituiscono (in accordo con la teoria) la base empirica di riferimento per la stima dei parametri caratteristici della struttura dei tassi; rilevata la struttura, lo schema di valutazione consente l'analisi dei CCT e dei CTO (ed eventualmente degli altri titoli derivati: opzioni su BOT, BTP e CCT, contratti ricavabili dal CCT con tecniche di *stripping*).<sup>10</sup>

Il modello non è finalizzato quindi a identificare la struttura dei rendimenti, non è soltanto «un metodo complicato di interpolazione»,<sup>11</sup> ma deve poter costituire il riferimento (teorico e quanti-

<sup>8</sup> Anche nel caso d'indicizzazione a parametri non assimilabili al prezzo (rendimento) di titoli di mercato, per la valutazione è comunque richiesto un modello specifico della variabile di stato, e il prezzo è ricavato con l'argomento di arbitraggio; cfr. Cox, INGERSOLL, ROSS (1980), ad esempio pp. 394-395. Considerazioni analoghe valgono nel caso del *pricing* di opzioni, cfr. INGERSOLL (1987), pp. 381-383.

<sup>9</sup> Anche i BOT, i BTP e i CTO sono titoli *irs* (e anche per i CTO, poiché incorporano un'opzione su *bond*, vale la qualificazione di *derivative*).

<sup>10</sup> Cfr. DE FELICE, MORICONI (1991b).

<sup>11</sup> L'espressione è in BROWN, SCHAEFER (1991), p. 14.

tativo) per la valutazione di tutti i titoli *irs* contrattati o ipotizzabili, che possa essere impostata in modo comparativo.

Dal punto di vista dell'analisi empirica, la versione univariata del modello di Cox, Ingersoll e Ross (CIR) sembra offrire un buon livello di accuratezza nella descrizione del mercato, in rapporto alla trattabilità matematica dello schema formale e alla semplicità d'interpretazione dei risultati: concetti come struttura dei tassi attesi, struttura dei premi di liquidità, misura del rischio di tasso di interesse, ambigui nel linguaggio della *term structure theory* tradizionale, acquistano un preciso significato formale e una valenza operativa diretta.<sup>12</sup>

Oltre agli aspetti quantitativi, la definizione di un modello di mercato ha un importante ruolo euristico per la corretta "identificazione" delle proprietà tecniche dei contratti<sup>13</sup> e quindi nella scelta dei metodi di gestione appropriati.

Anche senza il ricorso a ipotesi specifiche sull'evoluzione della variabile di stato, la struttura logica del modello consente di precisare come i titoli *irs* siano affetti da due componenti di rischio (di tasso): una dovuta all'aleatorietà del fattore di sconto, l'altra indotta dall'aleatorietà delle poste del flusso; per cui, in particolare, il progetto d'indicizzazione risulta finalizzato a realizzare una correlazione negativa (autoimmunizzazione) tra le due componenti di rischio (che nella pratica non può essere perfetta, perciò resta significativo il problema della misura delle componenti di rischio).

D'altra parte, può essere pure rilevato come la caratteristica dei contratti *irs* di avere generalmente note le modalità del flusso di importi (scadenze e/o poste) conferisca al rischio di tasso di interesse una dimensione «intrinsecamente intertemporale» (per cui «una variazione inattesa dei tassi di interesse, che abbia effetto adesso, influenza tutti i rendimenti futuri, cosicché il rischio di tasso di interesse *si compone* nel tempo»),<sup>14</sup> connessa con le preferenze degli investitori sull'allocazione nel tempo delle risorse, che risulta difficilmente precisabile nel caso dei titoli azionari (poiché «il rischio azionario è l'effetto del contemporaneo realizzarsi dei rendimenti»).<sup>15</sup>

---

<sup>12</sup> Cfr. COX, INGERSOLL, ROSS (1985).

<sup>13</sup> La *identification* costituisce un problema significativo per tutti i contratti finanziari "nati senza teoria", e perciò percepiti (generalmente) in modo distorto dal mercato; il problema è riconosciuto rilevante e complesso: ha effetto sulla risposta empirica dei prodotti e sulla qualità dei mercati.

<sup>14</sup> INGERSOLL (1987), p. 404.

<sup>15</sup> INGERSOLL (1987), p. 404.

Ne consegue che la gestione di portafogli puramente *irs* non può utilizzare gli schemi tipici del mercato azionario, basati sul principio di compensazione dei rischi e sulla tecnica di diversificazione. Nell'impostazione tradizionale della teoria delle scelte di portafoglio (alla Markowitz) il rischio indotto dall'aleatorietà dei valori dei titoli azionari può essere controllato selezionando un numero "sufficientemente grande" di titoli con rendimenti "poco" correlati tra loro (evidentemente, più bassa è la correlazione tra i rendimenti, più efficace è l'effetto della diversificazione). Nel caso di portafogli composti da contratti *irs*, poiché il corso dei titoli dipende dal tasso d'interesse (aleatorio), i rischi sono altamente correlati; la rischiosità dei portafogli di puro investimento non può perciò essere ridotta per diversificazione; la rischiosità dei portafogli d'intermediazione, composti da contratti di attivo e di passivo, può essere controllata selezionando contratti quanto più possibile simili, ma con valenza contabile opposta (il *perfect matching* è la situazione estrema, in cui si determina una correlazione negativa perfetta).

È rilevante (anche per valutare complessivamente la valenza operativa dei modelli stocastici di mercato) che con il modello univariato sia possibile impostare schemi di selezione di portafoglio che utilizzano la teoria dell'immunizzazione finanziaria, e perciò sono specifici per i contratti *irs*.<sup>16</sup> Da questa prospettiva, risulta possibile impostare una corretta misurazione e controllo del rischio di tasso d'interesse nell'attività d'intermediazione finanziaria;<sup>17</sup> possono aversi utili indicazioni per la gestione delle politiche del debito pubblico; la diffusione della logica di *asset-liability management* nella gestione dei portafogli e delle istituzioni potrebbe migliorare le qualità di efficienza e la completezza dei mercati.<sup>18</sup>

Nella pratica, comunque, non sembrano superate le difficoltà delle origini: quando il bisogno di dover valutare contratti "nati senza

<sup>16</sup> Cfr. DE FELICE, MORICONI (1991a).

<sup>17</sup> Nel numero di fine maggio 1992, *The Economist*, nell'occhiello all'articolo "Taming the derivatives beast", diagnosticava che: «gli organi di vigilanza e gli operatori sui mercati finanziari sono sempre più preoccupati per il fatto che i rischi impliciti nei titoli derivati non sono misurati né valutati correttamente» (p. 85).

<sup>18</sup> Cfr. MERTON (1990), pp. 451, 467-471. A questo proposito, è significativo, da più punti di vista, il riferimento al Fondo per l'ammortamento del debito pubblico: i metodi basati sui modelli stocastici di mercato potrebbero rispondere all'esigenza di equipaggiare il Fondo con schemi di *lettura* del mercato secondario, per gestire politiche selettive ed interventi mirati, per intervenire su segmenti del mercato che risentono di errori di valutazione da parte degli operatori o che siano influenzati negativamente da una maldistribuzione delle scadenze nel tempo (SALVEMINI, 1992b).

teoria" giustificò il ricorso agli unici strumenti di analisi disponibili (basati sui canoni tradizionali della certezza), anche se non adeguati per gestire l'innovazione degli importi aleatori. Gli strumenti della nuova teoria non hanno infatti raggiunto la valenza di standard operativi, né il processo d'identificazione della qualità dei contratti innovativi sembra aver prodotto consenso. Paradossalmente, l'esigenza urgente (richiesta dall'onda del mercato) della logica del probabilismo ha definito un "disagio da incertezza" che, nonostante gli auspici al superamento,<sup>19</sup> dà tuttavia segni visibili di sé nelle mode di gestione.

La valutazione dei CCT è tuttora (generalmente) ispirata alle "consuetudini del reddito fisso", per cui «in materia di rendimenti di titoli a tasso variabile sono frequenti generalizzazioni e approssimazioni concettuali più o meno arbitrarie».<sup>20</sup> Sul tema della misura di rischiosità (rischio di tasso d'interesse) l'informazione pubblica è ancora contraddittoria: nei riferimenti degli operatori, il rischio è misurato dall'"orizzonte di liquidità" (definito come «il tempo mancante alla prossima data di revisione del tasso di interesse cedolare»)<sup>21</sup> recentemente accettato nella normativa sulle SIM,<sup>22</sup> ma anche dalla durata media finanziaria (*duration* di Macaulay) calcolata su un flusso con importi noti, ottenuto proiettando su tutte le scadenze l'ultima cedola osservata e quindi "sterilizzando" il meccanismo d'indicizzazione, basato sulla variabilità del rendimento cedolare. Ne risulta che, ad esempio, il CCT 1-3-91/98 (codice ABI 13096) il 26 novembre 1991 ha rischio di circa 2 mesi nel senso dell'orizzonte di liquidità e rischio 4.5 anni se assimilato a un titolo sterilizzato.<sup>23</sup>

### 3. Diagnosi preliminari sugli effetti dell'indicizzazione finanziaria

Si consideri la tipologia di ammortamento tipica dei CCT (rimborso di capitale in unica soluzione alla scadenza, pagamento delle cedole in date equidistanziate).

---

<sup>19</sup> Nel rapporto su "Asset and Liability Management by Banks", si rileva l'urgenza di «formare figure professionali educate all'incertezza» (OECD, 1987, p. 16).

<sup>20</sup> MONTI, ONADO (1989), p. 298

<sup>21</sup> BANCA COMMERCIALE ITALIANA (1984), p. 4.

<sup>22</sup> Cfr. articolo 32, secondo comma del Regolamento 2.7.1991 della Banca d'Italia, in attuazione della legge 2.1.1991 (legge sulle SIM): «i titoli a tasso variabile sono imputati alla fascia di vita residua corrispondente alla prossima data di revisione del tasso».

<sup>23</sup> Il dato è pubblicato su *Il Sole 24 Ore* del 27 novembre 1991.

Nell'analisi del meccanismo d'indicizzazione è rilevante il cosiddetto *lag* temporale (ampiezza dell'intervallo di tempo intercorrente tra l'istante di determinazione o di *fixing* dell'indice e l'istante di pagamento della cedola indicizzata) e l'ampiezza dell'intervallo intercedola in confronto con la periodicità dell'indice di riferimento.

Se (come è per i CCT) il parametro d'indicizzazione è dato dal rendimento di *zero-coupon bond* (*zcb*), per periodicità dell'indice si intende la *maturity* dello *zcb*, che in questo senso è il titolo base dell'indicizzazione, rispetto cui il CCT è il bene derivato.

Nel caso in cui ciascun istante di *fixing* coincide con l'inizio del periodo di godimento cedola, e l'intervallo intercedola è uguale alla *maturity* del titolo di riferimento (indicizzazione "sincrona"), allora il titolo indicizzato replica perfettamente, su un orizzonte uguale alla sua vita a scadenza, un *roll-over* del capitale nominale sullo *zcb* di riferimento.

Si consideri un mercato dei titoli *irs*, che soddisfi le ipotesi usuali di mercato perfetto, caratterizzato da una struttura dei tassi d'interesse di equilibrio; sia  $t$  l'istante di osservazione e  $t_1, t_2, \dots, t_m$  lo scadenziario di riferimento del titolo indicizzato ( $t \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$ ), che replichi perfettamente un *roll-over* su una scadenza di titoli base del mercato. Si dimostra, come conseguenza diretta dell'argomento di arbitraggio, che il flusso delle cedole indicizzate, riferite a un capitale nominale unitario, è equivalente, sia in valore che in sensibilità a variazioni dei tassi, a una coppia di *zcb* unitari, deterministici, con scadenza  $t_1$  e  $t_m$ , con segno contabile positivo e negativo, rispettivamente (cfr. Appendice 1).

Il risultato è rilevante, poiché consente di calcolare la rischiosità del flusso indicizzato (aleatorio) misurando la durata media finanziaria (*duration* di Macaulay) del flusso deterministico equivalente, che risulta generalmente negativa.

Se oltre agli importi indicizzati si considera il rimborso del capitale a scadenza (*zcb* unitario, con segno contabile positivo) il flusso risultante si riduce a uno *zcb* unitario deterministico esigibile in  $t_1$ ; quindi il flusso composto dalle cedole aleatorie e dal capitale a scadenza ha *duration* uguale a  $t_1 - t$ .

L'ulteriore aggiunta della prima cedola (con scadenza in  $t_1$ ), nota in  $t$ , aumenta il valore del flusso, senza alterarne la *duration*.

In ciascuna data di scadenza della cedola, il corso del titolo è al livello di parità; nel periodo intercedola il corso secco resta "assai prossimo al valore nominale", ma soltanto se il tasso di rendimento di mercato (nel periodo intercedola) si mantiene "assai prossimo" al livello di rendimento della cedola, per cui, in generale, tra successive



scadenze, sono dati rischi di variazioni in conto capitale. In questo senso la *duration* coincide con l'orizzonte di liquidità, cioè misura il tempo necessario al conseguimento della prossima parità teorica; anche da questo punto di vista può essere interpretata come misura di rischio. D'altra parte, il fatto che la *duration* del solo flusso indicizzato sia negativa e quindi abbatta, nel calcolo della *duration* complessiva del titolo, i pesi delle componenti deterministiche, indica come nei titoli indicizzati sia implicito un meccanismo di riduzione del rischio (autoimmunizzazione).

Risulta pure evidente come lo *spread* rappresenti un elemento spurio nella logica dell'indicizzazione: l'aggiunta di un flusso d'importi deterministici aumenta la *duration* complessiva del titolo, dilatando l'orizzonte di liquidità, e altera i livelli di parità teorica del prezzo, in modo conveniente per il detentore, con l'aggiunta di una quantità che, in ipotesi di stabilità della struttura per scadenza dei tassi d'interesse, è strettamente decrescente con la *maturity* del titolo.

I dispositivi d'indicizzazione caratteristici dei CCT non si discostano qualitativamente dall'indicizzazione sincrona; una loro valutazione quantitativa richiede uno schema di analisi più fine e un modello del mercato di riferimento.

#### 4. Una teoria dei CCT: misurazione delle componenti di prezzo e rischiosità

Il modello stocastico di mercato consente di definire uno schema completo di valutazione del CCT, considerando le particolarità contrattuali del titolo (*lag* non coincidente con la periodicità del flusso cedolare, molteplicità delle aste che determinano la cedola, regola di calcolo dell'indice di riferimento, livello dello *spread*).

Oltre alla valutazione del prezzo, consistente con la struttura di equilibrio di mercato (e con le aspettative implicite in questa struttura), è possibile misurare la rischiosità, nella forma della *duration* stocastica (semielasticità del prezzo rispetto a variazioni del tasso "a breve", riportata su scala temporale), potendo distinguere la componente dovuta all'aleatorietà delle cedole (rischiosità d'importo) dall'effetto indotto dalla variabilità del fattore di attualizzazione (rischiosità di sconto).

Il modello consente anche di caratterizzare operativamente criteri di equivalenza tra importi certi e importi aleatori: in particolare, per ciascuna cedola aleatoria è espressivo calcolare il valore cosiddetto *ex ante* di modello, definito come l'importo certo che sostituito alla cedola ha lo stesso prezzo di equilibrio, calcolato sulla base del modello. (La struttura formale dell'impostazione è sviluppata nell'Appendice 2.)

In riferimento alla situazione osservata sul mercato telematico il 26 novembre 1991, è stato analizzato un ipotetico CCT quinquennale, con cedola semestrale, indicizzato ai prezzi delle aste dei BOT semestrali dei due mesi che precedono di un mese l'inizio godimento cedola; si è ipotizzato che il titolo sia emesso alla data di valutazione, non sono considerati gli effetti fiscali né lo *spread* (aggiungendo uno *spread* di 0.50 il titolo proposto è molto simile a una tipologia contrattabile sul mercato, ad esempio al titolo con codice ABI 13208).

Le principali caratteristiche del titolo sono sintetizzate nella tabella 1; la struttura cedolare è descritta riportando per ciascuna cedola il prezzo di modello ( $P$ ) all'istante di valutazione, il valore *ex ante* di modello ( $z$ ), la rischiosità complessiva ( $\Omega$ ) e le rischiosità di sconto ( $\Phi$ ) e d'importo ( $\Gamma$ ); le stesse quantità sono calcolate per il valore di rimborso e per il titolo nel suo complesso. Il CCT risulta caratterizzato da una *duration* stocastica ( $D$ ) di circa 5 mesi, praticamente coincidente con l'ampiezza del convenzionale orizzonte di liquidità. L'effetto di riduzione del rischio perseguito con il meccanismo d'indicizzazione (autoimmunizzazione) risulta dal segno negativo della rischiosità d'importo delle cedole aleatorie (la prima cedola ha rischiosità d'importo nulla poiché è nota nell'istante di valutazione).

Nella tabella 2 il CCT è confrontato con titoli di riferimento caratterizzati da cedole fisse (deterministiche), strutturati sullo stesso scadenziario. Sono considerate quattro tipologie di flussi deterministici, equivalenti (da diversi punti di vista) al titolo indicizzato: oltre alle cedole *ex ante*, e al flusso delle cedole costanti tutte uguali alla prima cedola nota, viene considerato il titolo "a cedole implicite" (ciascuna cedola è calcolata utilizzando il tasso *forward*, implicito nella struttura dei rendimenti stimata, relativo al periodo di godimento cedola), e il titolo con cedole di parità (cedole calcolate sulla base del *par yield*, definito come il tasso nominale di un *bullet bond* che abbia prezzo di equilibrio, calcolato rispetto alla struttura dei rendimenti di riferimento, alla pari). Le cedole *ex ante* differiscono

TABELLA 1

CEDOLE					
data esigibilità	$P$	$z$	$\Omega$	$\Phi$	$\Gamma$
26/05/92	5.1920	5.4763	0.4602	0.4602	0.0000
26/11/92	4.9291	5.4843	-7.0054	0.8490	-7.8543
26/05/93	4.6777	5.4905	-5.4433	1.1769	-6.6203
26/11/93	4.4358	5.4928	-4.1257	1.4535	-5.5791
26/05/94	4.2045	5.4925	-3.0140	1.6864	-4.7004
26/11/94	3.9841	5.4905	-2.0762	1.8825	-3.9588
26/05/95	3.7750	5.4880	-1.2852	2.0476	-3.3328
26/11/95	3.5768	5.4852	-0.6183	2.1864	-2.8047
26/05/96	3.3888	5.4821	-0.0565	2.3031	-2.3596
26/11/96	3.2109	5.4791	0.4168	2.4012	-1.9844
CAPITALE					
data esigibilità	$P$	$z$	$\Omega$	$\Phi$	$\Gamma$
26/11/96	58.6034	100.000	2.4012	2.4012	0.0000
TITOLO					
$P(X) = 99.9781$		$D(X) = 0.4061$			
$\Omega(X) = 0.3796$	$\Phi(X) = 2.0495$		$\Gamma(X) = -1.6698$		

dalle corrispondenti cedole implicite poiché il *lag* temporale (circa 7 mesi) non coincide con l'ampiezza del periodo intercedola (e con la *maturity* di riferimento). Il titolo con cedole *ex ante* genera un flusso sistematicamente più basso di quello corrispondente al titolo con cedole implicite, e ha un prezzo di modello sotto la pari. Il prezzo del titolo a cedola costante (costantemente uguale alla prima cedola implicita) non si discosta dal prezzo di equilibrio soltanto perché la struttura dei rendimenti di riferimento non è molto inclinata. La notevole differenza tra le rischiosità (e le *duration*) del flusso deterministico con cedole *ex ante* e del titolo indicizzato quantifica l'effetto di riduzione del rischio indotto dal meccanismo d'indicizzazione, su titoli che (per costruzione) hanno stessa vita a scadenza e stesso prezzo di modello.

TABELLA 2

data esigibilità	tasso implicito	Tasso fisso				Variabile
		cedole implicite	cedola di parità	cedole <i>ex ante</i>	prima cedola	cedole
26/05/92	0.0548	5.4763	5.4891	5.4763	5.4763	5.4763
26/11/92	0.0549	5.4880	5.4891	5.4843	5.4763	I <sub>2</sub>
26/05/93	0.0549	5.4939	5.4891	5.4905	5.4763	I <sub>3</sub>
26/11/93	0.0550	5.4960	5.4891	5.4928	5.4763	I <sub>4</sub>
26/05/94	0.0550	5.4955	5.4891	5.4925	5.4763	I <sub>5</sub>
26/11/94	0.0549	5.4937	5.4891	5.4905	5.4763	I <sub>6</sub>
26/05/95	0.0549	5.4914	5.4891	5.4880	5.4763	I <sub>7</sub>
26/11/95	0.0549	5.4886	5.4891	5.4852	5.4763	I <sub>8</sub>
26/05/96	0.0549	5.4855	5.4891	5.4821	5.4763	I <sub>9</sub>
26/11/96	0.0548	5.4825	5.4891	5.4791	5.4763	I <sub>10</sub>
	Prezzo	100.0000	100.0000	99.9781	99.9036	99.9781
	Rischiosità	2.0494	2.0493	2.0495	2.0498	0.3796
	<i>Duration</i>	3.5060	3.5057	3.5063	3.5073	0.4061

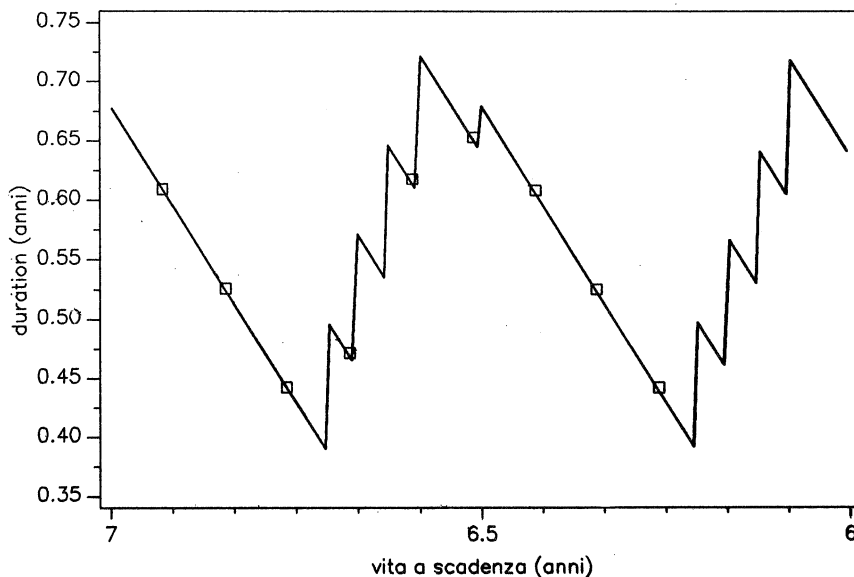
Nel grafico della figura 1 è rappresentato il livello della *duration* stocastica nei successivi istanti di vita di un CCT (codice ABI 13208), calcolato con una stessa struttura dei rendimenti (stimata il 26-11-1991). Sembra interessante segnalare l'effetto dell'incremento d'informazione dovuto alle aste dei BOT, che rendono la cedola cui si riferiscono progressivamente meno incerta, quindi sempre meno indicizzata (autoimmunizzata), e perciò inducono bruschi aumenti nel livello complessivo di rischio, più accentuati di quelli dovuti allo stacco cedola (che, nella figura, provoca il salto corrispondente a 6 anni e mezzo di vita residua).

Il grafico può anche essere letto come descrizione dell'andamento della rischio del mercato in un dato istante di osservazione, rilevata su un insieme di titoli (tipologicamente omogenei, rispetto al meccanismo d'indicizzazione), ordinati per vita residua decrescente; i livelli di rischio che è stato possibile misurare per i titoli effettivamente scambiati il 26-11-1991 sul mercato telematico (che si differenziano dal 13208 solo per la data di emissione) sono evidenziati con un quadrato.

FIGURA 1

## ANDAMENTO DELLA DURATION

26 novembre 1991



È opinione comune che l'incremento d'informazione, riducendo l'incertezza, riduce il rischio: in questa prospettiva i CCT forniscono un esempio di come questa opinione non ha senso se non è specificata correttamente; il superamento dell'apparente paradosso si ha considerando che il rischio va sempre misurato in termini d'incertezza sulla realizzazione dell'obiettivo: non interessa quindi l'incertezza sulle singole componenti (cedole) del contratto quanto l'incertezza sul conseguimento dell'obiettivo per cui il contratto è stato disegnato (conseguimento del rendimento di mercato).

L'analisi quantitativa dei meccanismi d'indicizzazione consente la possibilità di sperimentare gli effetti tecnici dei parametri contrattuali, che possono considerarsi strategici per le politiche di emissione. Cambiamenti nell'algoritmo di calcolo della quota indicizzata della cedola, rispetto alle regole in uso, provati sperimentalmente in di-

verse situazioni di mercato, non hanno determinato differenze significative nella qualità dei titoli.<sup>24</sup>

## 5. Bizzarrie nell'analisi empirica dei prezzi

### *La struttura dei rendimenti del mercato telematico*

L'analisi empirica è stata svolta su base giornaliera, utilizzando le quotazioni rilevate sul mercato telematico dei titoli di Stato, dal 1° gennaio 1990 al 30 giugno 1992. Nel periodo considerato, i prezzi rilevati sul circuito telematico possono essere considerati un indice espressivo della situazione del mercato,<sup>25</sup> più rappresentativi delle quotazioni di borsa.

Nei grafici "a nube" delle figure 2A e 2B sono rappresentate, in funzione della data di osservazione, le quotazioni (corsi secchi per 100 lire nominali) dei BTP e dei CCT, che costituiscono, insieme alle quotazioni dei BOT, la base-dati di riferimento dell'analisi (sono state considerate 7951 osservazioni per i BTP e 13538 per i CCT).

La struttura per scadenza dei tassi d'interesse, nella forma funzionale definita dal modello di CIR univariato, è stata stimata, in ciascuna giornata di osservazione, utilizzando le quotazioni dei BOT e dei BTP, con una procedura di regressione non-lineare del tipo proposto da Brown e Dybvig.<sup>26</sup> Poiché il flusso dei pagamenti relativo a ciascun titolo esaminato è stato calcolato al netto della ritenuta fiscale, la stima identifica la struttura dei rendimenti netti.

---

<sup>24</sup> Sono state considerate ipotesi di CCT con periodicità trimestrale, semestrale e annuale, indicizzati ai prezzi dei BOT a 3, 6 e 12 mesi rispettivamente, ottenuti sia come esito di una singola asta che come media su quattro aste consecutive, con *lag* uguale al periodo intercedola. I prezzi teorici di questi titoli alternativi, calcolati col modello di CIR sul periodo di osservazione, non si discostano significativamente dai prezzi teorici dei CCT trattati sul mercato. Naturalmente ciò non garantisce che le quotazioni seguano un comportamento analogo qualora questi titoli fossero effettivamente emessi, poiché non si può escludere che nel mercato prevalgano criteri di valutazione diversi dal modello utilizzato per l'analisi sperimentale.

<sup>25</sup> «Le negoziazioni sul mercato telematico dei titoli di Stato ... solo nel 1991 hanno raggiunto un grado di efficienza e dimensione simile a quelle dei mercati anglosassoni per numero di operatori e titoli quotati, per ammontare di negoziazioni e per capacità di riflettere le condizioni e le attese degli operatori» (BIANCHI, 1992, p. 58).

<sup>26</sup> Il metodo consiste essenzialmente nello stimare i parametri "aggiustati per il rischio" del modello che producono la miglior coincidenza, nel senso dei minimi

FIGURA 2A

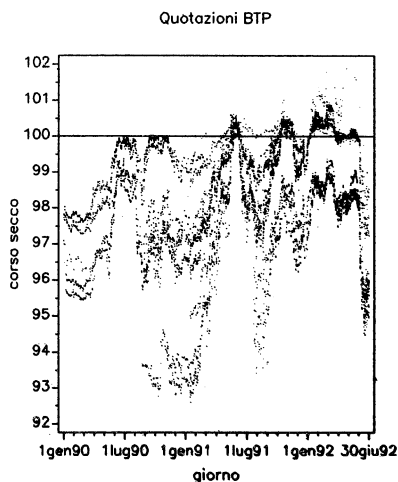
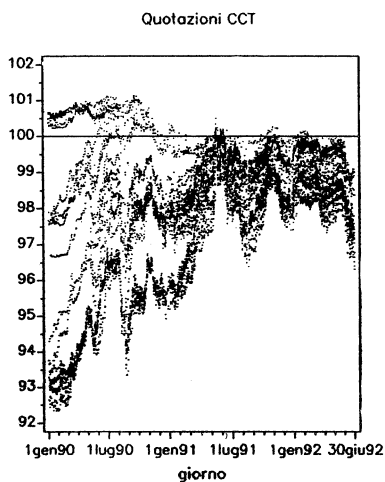


FIGURA 2B



Nelle 626 giornate di osservazione, il tasso locale  $r(t)$  ha oscillato tra il valore minimo 0.0935 e il valore massimo 0.1244, con un valore medio di 0.1045 (e deviazione standard di 0.0042). Il valore medio del tasso asintotico di lungo periodo  $r_L$  è risultato uguale a 0.1202, con un intervallo di variazione di circa 0.05 (dev. st. 0.0143); il valore

quadrati, tra prezzi teorici e prezzi osservati. La sottostante idea teorica di base è che un modello intertemporale di arbitraggio della curva dei rendimenti implica restrizioni sulla struttura dei prezzi dei titoli obbligazionari contrattati a una stessa data. Anche se la specificazione completa del modello può essere ottenuta solo da stime su serie storiche di prezzi, l'informazione contenuta nelle singole *cross section* è sufficiente per effettuare valutazioni dei titoli *irs* coerenti con l'esclusione di arbitraggi non rischiosi.

Se si volesse utilizzare il modello a fini previsivi, la stima su serie storiche sarebbe naturalmente la procedura obbligata. Tuttavia, come era lecito attendersi, tutte le verifiche empiriche di modelli univariati del tipo CIR hanno indicato una forte instabilità dei parametri stimati su serie storiche in dipendenza dei diversi periodi storici considerati. Ciò è in contrasto con le ipotesi base, che richiedono valori dei parametri costanti nel tempo ed evidenzia l'inadeguatezza di tali modelli nella logica della previsione. Si tratta di un risultato che può apparire ovvio, data l'estrema semplicità del modello utilizzato, a fronte della complessità del problema reale. D'altra parte, la stima su successive *cross section*, che implica una continua ricalibratura dei parametri aggiustati per il rischio, ha mostrato anche nelle esperienze di applicazione al mercato italiano (cfr. BARONE, CUOCO, ZAUTZIK, 1989) che il grado di stabilità di alcuni parametri (in particolare della volatilità implicita) è confrontabile con quello ottenuto su serie storiche. Ciò suggerisce che l'uso combinato dell'informazione fornita dalla serie storica e dell'informazione ricavata dal-

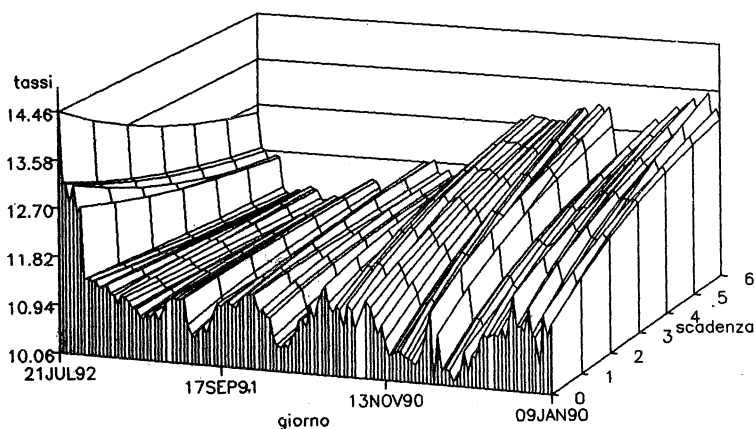
medio, sull'intero periodo di analisi, del coefficiente di volatilità del tasso locale  $\rho\sqrt{r(t)}$  è risultato uguale a 0.024 (dev. st. 0.002).<sup>27</sup>

Nella figura 3 sono proposte le strutture dei rendimenti relative a ciascun martedì della settimana, estratte dalla serie storica delle strutture giornaliere e rappresentate per *maturity* fino a 6 anni.

FIGURA 3

## EVOLUZIONE DELLA STRUTTURA DEI TASSI

Estratti settimanali da rilevazioni giornaliere  
(martedì)



L'andamento delle strutture in funzione della *maturity*, dapprima crescente, mostra, dai primi mesi del '91 fino a gennaio 1992, un progressivo appiattimento, indotto dalla forte discesa dei rendimenti relativi alle scadenze più lunghe (che può essere attribuita all'aspettativa di convergenza sui tassi medi europei); successivamente appaiono torsioni sporadiche delle curve, che annunciano l'inversione della pendenza della struttura, rilevata nell'ultimo periodo.

L'inclinazione tendenziale (lungo la *maturity*) e la situazione di *twist* della superficie individuata dalle curve dei rendimenti sono evi-

l'osservazione di successive *cross section* di prezzi (come nel metodo di stima "a tre fasi" proposto in DE FELICE, MORICONI 1991b) potrebbe costituire un compromesso accettabile per l'uso pratico di tali modelli. Come osservato da DUFFIE (1992, p. 216): «Questo processo di riparametrizzazione è inconsistente dal punto di vista teorico ..., ma sembra in qualche senso inevitabile».

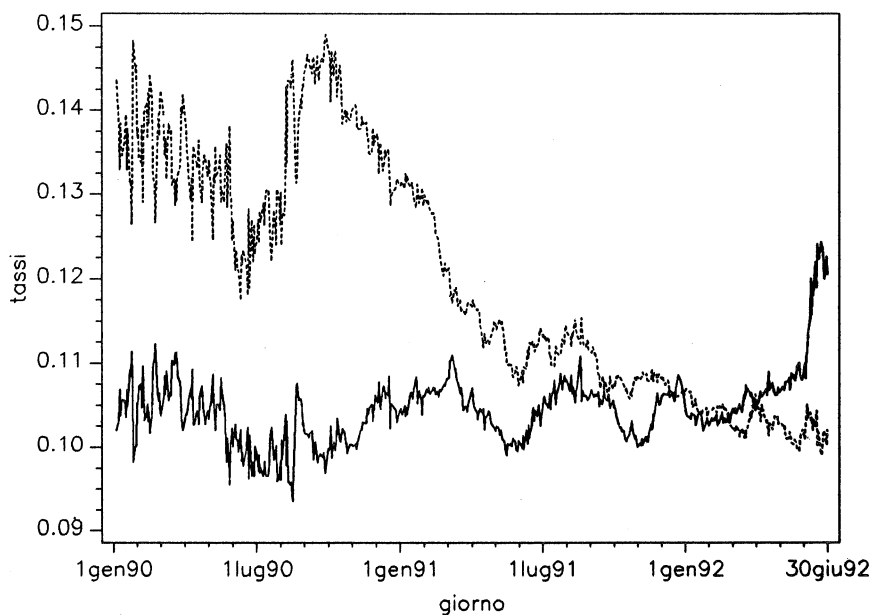
<sup>27</sup> Le definizioni di  $r(t)$ ,  $r_L$  e  $\rho$  sono date nell'Appendice 2.



denziate anche dall'analisi dei sentieri stimati del tasso locale  $r(t)$  (linea continua) e del tasso a lungo termine  $r_L$  (linea tratteggiata) proposti nella figura 4: esclusi i rari casi di curve con andamento non monotono, si ha un *trend* crescente dei rendimenti se il tasso a lungo termine domina il tasso a breve, si ha *twist* all'inversione della dominanza.

FIGURA 4

TASSO LOCALE E TASSO A LUNGO TERMINE



### *Analisi del prezzo dei CCT*

L'analisi empirica dei CCT verrà articolata distinguendo l'orizzonte di osservazione, rispetto al 1° marzo 1991, in due sottoperiodi con caratteristiche di più netta omogeneità. Dal marzo 1991 è cambiato sostanzialmente l'insieme dei titoli trattati sul telematico: il numero dei CCT "di ultima generazione" (le cui proprietà tecniche possono essere sintetizzate con la sigla C6/A/2)<sup>28</sup> diventa maggiore del nume-

<sup>28</sup> La sigla sta per "cedola semestrale/indicizzazione ai BOT annuali/ aliquota fiscale del secondo tipo (12.5%)". Si tratta di titoli della tipologia di indicizzazione che è classificata  $\psi$ , in BARONE, FOLONARI (1992), con *spread* di 50 punti base; dal maggio 1988 sono stati emessi CCT soltanto di questo tipo.

ro complessivo di CCT delle altre tipologie; nel secondo periodo, i titoli del tipo C6/A/2 contribuiscono in modo essenziale all'allargamento del *range* delle scadenze disponibili sul mercato (comprese tra 3 e 7 anni circa), mentre nel primo periodo la disponibilità dei valori estremi dello spettro di scadenze era garantita con titoli di altre tipologie. Dal punto di vista delle transazioni, si consolida la tendenza all'aumento sistematico delle quotazioni di tutti i CCT scambiati, con una significativa riduzione dello scarto tra valore nominale e corso secco, e una minore dispersione all'interno di ciascuna *cross-section* (insieme delle quotazioni a una stessa data). L'andamento è leggibile nella figura 2B: si può convenzionalmente datare a marzo 1991 l'entrata delle quotazioni dei CCT all'interno di una ristretta fascia di oscillazione, contigua al livello di parità e ampia circa 3.5 lire. Più precisamente, la quotazione media passa dalle 97.24 lire del primo periodo a 98.84 lire nel secondo; la deviazione standard delle quotazioni del primo periodo è quasi il triplo di quella caratteristica del secondo periodo (2.17 contro 0.77 lire).

Per ciascun CCT quotato nel periodo di osservazione, è stato calcolato il prezzo teorico, con cadenza giornaliera (sulla base della struttura dei rendimenti stimata sui titoli a tasso fisso quotati nello stesso giorno), tenendo conto di tutte le specificità del meccanismo d'indicizzazione (compreso lo *spread*), perciò ottenendo valori confrontabili con le quotazioni osservate.

L'analisi dei prezzi evidenzia una generalizzata sopravvalutazione dei CCT, da parte del modello, rispetto alle quotazioni di mercato. Nel periodo di osservazione, l'errore di sopravvalutazione commesso in media dal modello nelle singole giornate oscilla intorno a 4.5 lire (per 100 lire nominali) e non scende al di sotto di 3 lire.

Il fenomeno del *mispricing* sistematico può essere interpretato come sintomo di un'intrinseca debolezza del modello, dovuta a "povertà" informativa (inadeguatezza del processo stocastico univariato a descrivere lo stato del mercato del debito pubblico); ma anche come conseguenza dell'estrema idealizzazione dovuta alle ipotesi di perfezione del mercato (assenza di tassazione, indipendenza del prezzo dalla quantità trattata, assenza di costi di transazione e possibilità di vendita allo scoperto, ...).

Tuttavia l'esito della sperimentazione può essere sfruttato in chiave euristica, per identificare quali condizioni tipiche del mercato

risultino distanti dalle ipotesi di base del modello. I fattori che possono indurre debolezza esplicativa appaiono numerosi, complessi (come gli effetti fiscali), non facilmente quantificabili (come l'effetto di "pressione dell'offerta"), possono dare spinte combinate (nel senso, ad esempio, della non corretta percezione della qualità del titolo); su questa linea è possibile utilizzare il modello per costruire e verificare congetture giustificative del *mispricing*, con ciò arricchendone il potere esplicativo.

### *Gli effetti fiscali*

In base alla normativa fiscale in vigore sul mercato italiano, oltre agli investitori che percepiscono il reddito al netto della ritenuta fiscale (tassati), può essere individuata almeno un'altra categoria costituita da agenti che, per gli elevati interessi passivi, risultano esenti *de facto*, e per i quali è rilevante l'ammontare degli importi lordi.<sup>29</sup>

La presenza d'investitori esenti determina una struttura di quotazioni mediamente più elevata di quella che caratterizzerebbe un mercato ideale, composto soltanto da agenti tassati: quindi la struttura dei rendimenti netti stimata sulle quotazioni rilevate dal mercato, data la presenza degli agenti esenti, dovrebbe risultare distorta verso il basso rispetto alla struttura netta ideale. Si giunge alla stessa conclusione, con termini invertiti, se ci si riferisce alla struttura dei rendimenti lordi, ipotizzando un mercato su cui operino soltanto investitori non tassati.

La struttura del mercato, e quindi la logica di definizione del sistema dei prezzi, è ulteriormente complicata dalla presenza di titoli soggetti a diversa ritenuta fiscale; ciò può indurre rilevanti effetti di *tax-clientele*.<sup>30</sup>

---

<sup>29</sup> Tra le due categorie esiste, in realtà, un'ampia varietà di situazioni, in ragione del tipo di reddito e della struttura dei bilanci, con importanti riflessi sull'equilibrio dei prezzi; cfr. BERNAREGGI (1986). Per chiarezza di esposizione, si farà riferimento soltanto alle due tipologie estreme degli investitori tassati e degli investitori esenti.

<sup>30</sup> Il problema dell'individuazione di una struttura dei rendimenti specifica per una data categoria fiscale d'investitori è strettamente connesso col problema della determinazione dell'ideale portafoglio titoli che tali investitori dovrebbero razionalmente detenere. Come è stato posto in luce nel dibattito teorico, dal modello di HODGES, SCHAEFER (1977) sino al lavoro di DERMODY, ROCKAFELLAR (1991), tra i due problemi esiste una relazione di dualità (nel senso della programmazione lineare). Per un'illustrazione dei possibili effetti di *tax-clientele*, a seguito dei cambiamenti di normativa fiscale intervenuti sul mercato italiano, cfr. ROVELLI (1991), in particolare pp. 21-22.

Le distorsioni nella stima della struttura per scadenza dei tassi d'interesse, causate dalla segmentazione fiscale del mercato, possono alterare la logica dei modelli di valutazione, con effetti più complessi nel caso dei titoli a tasso variabile rispetto ai titoli a tasso fisso. Per i CCT, l'effetto di disturbo può essere evidenziato anche considerando lo schema del titolo di reinvestimento (senza dover far ricorso al modello stocastico di valutazione): se sono stati considerati i flussi di pagamento al netto della ritenuta fiscale, si osserva che il fattore  $1/v(T, s) - 1$ , ricavato dalla struttura stimata e utilizzato per rappresentare l'indice di riferimento, potrebbe non coincidere con il tasso di reinvestimento appropriato per un investitore esente, che percepisce una struttura dei rendimenti specifica più elevata; viene perciò meno l'equivalenza tra la detenzione del titolo indicizzato e un impegno di *roll-over* ai tassi di mercato.<sup>31</sup> Se il mercato percepisse questo tipo di asimmetria fiscale come una possibilità effettiva di arbitraggio, potrebbe reagire correggendo in ribasso le quotazioni dei CCT, in maniera assimilabile a quanto si avrebbe valutando le cedole indicizzate in base alla struttura (stimata) dei rendimenti lordi.<sup>32</sup>

Questo tipo di *retuning* può essere facilmente incorporato nei modelli stocastici univariati e ha dato risultati soddisfacenti in un certo periodo storico.<sup>33</sup> Il processo di progressivo apprezzamento dei CCT, iniziato nella prima metà del 1991, ha indotto una sistematica tendenza all'*underpricing* del modello corretto per l'effetto di tassazione (con un errore medio, per singola *cross section*, contenuto approssimativamente tra 0.5 e 1 lira). Poiché nessun apprezzabile

<sup>31</sup> Si hanno effetti anche più diretti della segmentazione fiscale. Ad esempio, sempre nella logica del titolo di reinvestimento (considerato nell'ipotesi *after tax*), un CCT esente, indicizzato al rendimento netto dei BOT, consente a un investitore non tassato di reinvestire soltanto al rendimento netto. Un altro meccanismo che contribuisce ad alterare l'equivalenza tra una strategia di detenzione del CCT e una strategia di *roll-over* di BOT va individuato nelle diverse modalità di pagamento della tassa per i BOT, rispetto ai titoli con cedola.

<sup>32</sup> L'ipotesi di effettuare la valutazione dei CCT «incrociando» strutture nette e lorde è considerata anche da DRUDI e SCALIA (1992, p. 23).

<sup>33</sup> Fino ai primi mesi del 1991, l'analisi effettuata col modello di CIR a un solo fattore ha fornito *cross section* di prezzi teorici non lontani dalle quotazioni osservate alla Borsa di Milano. Ad esempio, il 24 luglio 1989, su un campione composto dai 12 CCT della tipologia C6/A/2 quotati, è stato rilevato un errore (*prezzo di mercato - prezzo di modello*) tra - 1.15 e 0.04 lire, con un errore medio di 0.65 lire (dev. st. 0.38); l'8 gennaio 1991, su 27 CCT trattati, si sono avuti livelli di *mispricing* compresi tra - 0.62 e 1.56 lire, con un errore medio di 0.96 lire (dev. st. 0.57); cfr. CASTELLANI, DE FELICE, MORICONI (1989); DE FELICE, MORICONI (1991b). Un'analisi della "tenuta" del modello sul periodo maggio 1988-dicembre 1989, distinguendo per tipologia di indicizzazione, è sviluppata in RISTUCCIA (1991).

nuovo fenomeno fiscale sembra aver avuto effetto nel periodo, ne deriva una perdita di credibilità del meccanismo di correzione ispirato alla presenza di segmentazione fiscale.

### *La significatività dell'indice di riferimento*

Un'altra corrispondenza mancata tra modello teorico e situazione reale è costituita dal fatto che il CCT è indicizzato a prezzi rilevati sul mercato primario, e quindi determinati in seguito a equilibri e con meccanismi potenzialmente diversi da quelli che regolano le quotazioni del secondario.

L'ipotesi di una sottovalutazione del titolo indotta da un disallineamento dell'indice rispetto ai rendimenti caratteristici del mercato secondario non appare giustificata dall'analisi *ex post*, se l'indice si considera comprensivo dello *spread*.

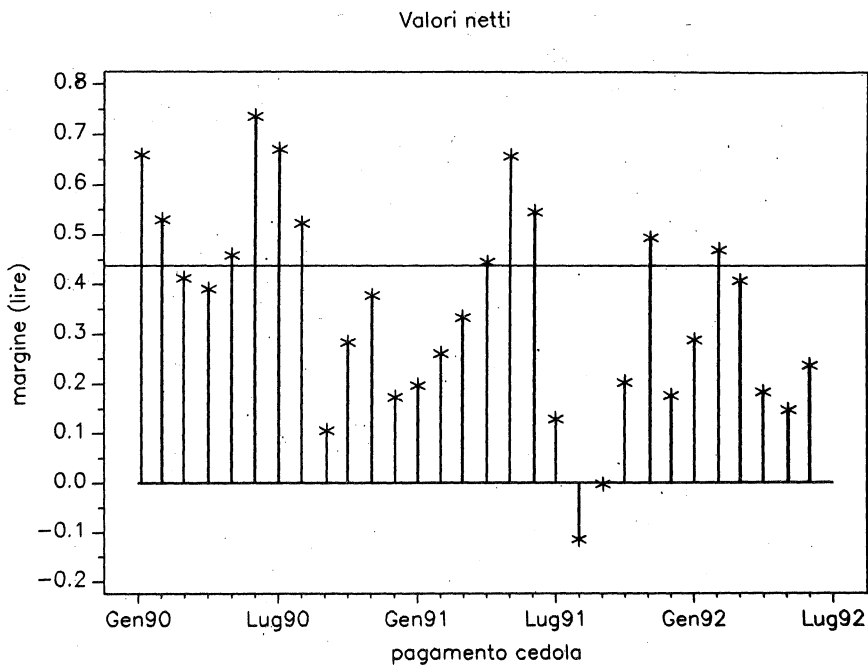
Nel grafico a barre della figura 5 è rappresentata la differenza tra il livello delle cedole (al netto della ritenuta fiscale) corrisposte dai CCT del tipo C6/A/2 e il rendimento netto a 6 mesi stimato sul mercato.

Le cedole risultano sempre (tranne due volte) più convenienti del rendimento di mercato; al netto dello *spread* (cioè misurando la distanza degli asterischi dalla linea orizzontale di 4.375 lire, corrispondente al valore netto dello *spread*) sono meno convenienti in 19 casi su 30. Si può quindi dire che il *roll-over* garantito dai CCT (relativamente alla categoria esaminata) è stato più conveniente del *roll-over* di mercato, poiché lo *spread* ha compensato lo scostamento tra il rendimento annuale sul primario e il rendimento semestrale, espresso su base annua, stimato sul secondario.<sup>34</sup>

---

<sup>34</sup> Il disallineamento tra i rendimenti osservati sul primario e stimati sul secondario non appare significativo nel caso delle scadenze trimestrali e semestrali: ciò esclude che il disallineamento sui rendimenti annuali possa essere causato dall'eccesso di domanda connesso alle tecniche di asta pura, che sollecitano la presentazione di domande multiple; su questo punto cfr. BUTTIGLIONE, PRATI (1991). La spiegazione va ricercata nell'interazione tra la segmentazione della domanda e la presenza molto attiva della Banca Centrale sul mercato primario: nel caso di BOT annuale, per servire una clientela che non può essere soddisfatta con titoli acquistabili sul secondario e che generalmente non dà indicazioni precise di prezzo, nel timore di essere esclusi dall'aggiudicazione a causa degli acquisti della Banca Centrale (rivolti a escludere le domande a prezzi ritenuti troppo bassi) le banche sono portate ad acquisti all'asta a prezzi non allineati. Va notato che nel periodo osservato gli interventi della Banca Centrale sono stati meno frequenti nel segmento dei titoli a 3 e a 6 mesi.

## CCT C6/A/2 - MARGINE SU CEDOLA INDICIZZATA



## La "pressione dell'offerta"

Se si prescinde dallo *spread*, un'emissione di CCT corrisponde, dal punto di vista della gestione del debito, a sostituire una serie di emissioni di BOT a ogni data di scadenza delle cedole del CCT, ciascuna a copertura di un fabbisogno uguale al nominale del CCT emesso (naturalmente ci si riferisce a BOT con *maturity* uguale al periodo intercedola del CCT).

Se il Tesoro dovesse coprire il debito con emissione di BOT, correrebbe il rischio di pagare alti rendimenti, per "pressione da offerta"; in questo senso, l'emissione di un CCT riduce il costo per il Tesoro rispetto all'emissione di BOT in serie.

Per considerazioni di questo tipo, viene a cadere una delle ipotesi base del modello teorico, consistente nell'assumere che il

comportamento degli operatori non possa condizionare il livello dei prezzi. A fronte di un gran numero di operatori, individualmente *price taker*, sul lato della domanda, si configura la presenza di un grande operatore che per la dimensione dell'offerta influenza il prezzo in ribasso e quindi ha interesse a diversificare il più possibile le emissioni sullo spettro delle scadenze.

L'analisi dell'equilibrio di un mercato primario così strutturato è teoricamente complessa e non è chiaro in quale misura questo tipo di asimmetria possa influire sui prezzi del mercato secondario.

### *L'allungamento dell'orizzonte di liquidità*

La spiegazione del *mispricing* in base all'ipotesi di non-liquidità del titolo sembra viziata da difetti di circolarità, che sfruttano l'ambivalenza di titolo centauro: il CCT è sottoquotato rispetto al prezzo di modello perché è poco liquido (cioè è considerato come un contratto a lungo termine), se fosse quotato al prezzo ideale sarebbe molto liquido (perché sarebbe equivalente al BOT di riferimento). D'altra parte la relazione tra prezzo e liquidità indica come il prezzo possa condizionare la qualità del titolo, con possibilità di effetti destabilizzanti (avvio di circoli viziosi: basso prezzo implica bassa qualità quindi più basso prezzo; o di circoli virtuosi: un alto prezzo ha l'"effetto di annuncio" di un'alta qualità che implica un più alto prezzo).

La relazione tra liquidità e prezzo fornisce una chiave di lettura più espressiva se impostata nella logica del *trade-off*: il "disallineamento" del CCT dalla linea di equilibrio dei prezzi può essere misurato in termini di *underpricing*, ma anche in termini di allungamento dell'orizzonte di liquidità: cioè come rischiosità aggiuntiva (equivalente alla perdita di liquidità), misurata sull'asse dei tempi. L'impostazione ha una valenza operativa diretta, rappresentando il mercato nel piano (*Duration, Prezzo normalizzato*).<sup>35</sup>

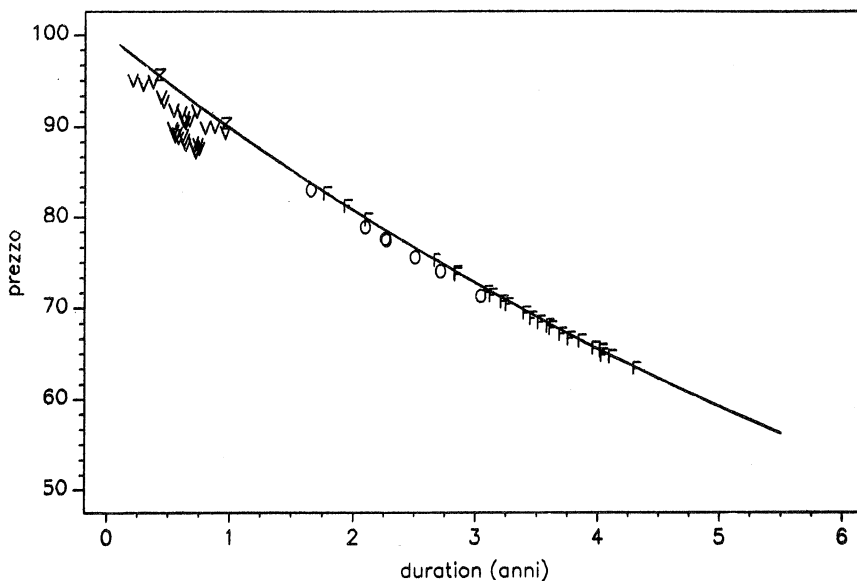
<sup>35</sup> Nel senso del teorema di immunizzazione stocastica, un titolo *irs* con caratteristiche contrattuali *c* si può considerare equivalente nell'istante *t* a uno *zcb* che abbia stesso valore e stessa *duration* stocastica (stesso rischio base). Al tempo *t*, sia  $v(t, s)$  la struttura dei corsi stimata sul mercato. Si consideri un titolo *c* con valore *P*, *duration* stocastica *D* e quotazione *Q*. Il valore  $v_D = v(t, t + D)$  è il valore di equilibrio, in *t*, di uno *zcb* unitario con *maturity* *D*; quindi la quantità  $z = P/v_D$  rappresenta il valore facciale di uno *zcb* che ha, in *t*, stesso valore di *c* e stesso rischio base. Si definisca "prezzo normalizzato" di *c* il rapporto:  $\Pi_n = 100 Q/z = 100 Qv_D/P$ . Si ha che  $\Pi_n$  è il prezzo pagato in *t* sul mercato per un titolo *c* equivalente, per prezzo e *duration*, a uno *zcb* con valore facciale di 100 lire e scadenza in *t* + *D*. Nel piano (*Duration, Prezzo*) la curva  $P = v(D)$  è interpretabile come frontiera di equilibrio del mercato nell'istante *t*. Per precisazioni, cfr. CASTELLANI, DE FELICE, MORICONI (1992).

Nella figura 6 è considerata la situazione del mercato al 26 maggio 1992.

FIGURA 6

## LINEA DI EQUILIBRIO E PREZZI NORMALIZZATI

26 maggio 1992



Con tratto continuo è indicata la linea di equilibrio  $P = v(D)$ : se le quotazioni dei titoli coincidessero con i valori di modello, i prezzi normalizzati si collocherebbero esattamente su questa curva. Sono rappresentati il prezzo normalizzato e la *duration* stocastica dei BOT ("Z"), dei BTP ("F"), dei CCT ("V") e dei CTO ("O"), quotati sul mercato telematico nella giornata. Il *mispicing* dei CCT è evidenziato dal fatto che i corrispondenti punti rappresentativi si localizzano al di sotto della linea di equilibrio; il loro scostamento dalla posizione ideale può essere descritto misurando la distanza del punto rappresentativo dalla curva lungo l'asse delle ascisse: ne risultano, in questa giornata, incrementi dell'orizzonte di liquidità compresi tra 0.07 e 0.55 anni.

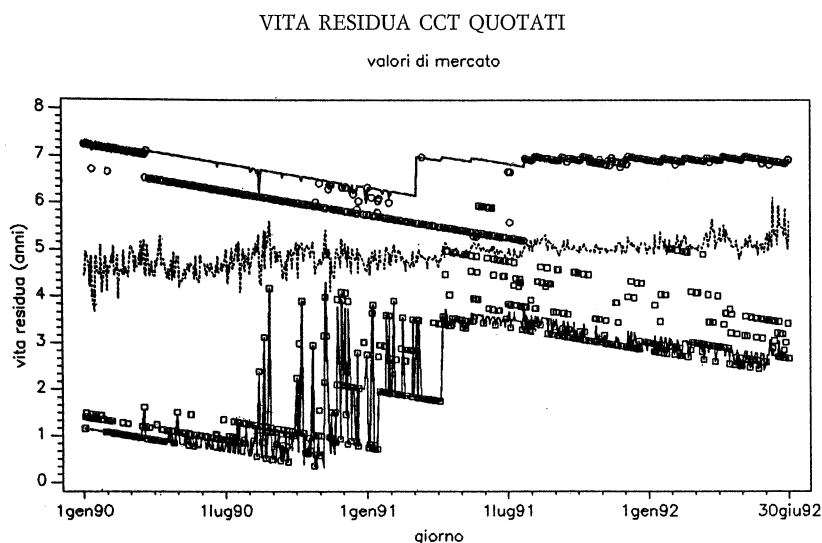


### Il peso della vita a scadenza

Se si analizza l'evoluzione del corso dei singoli CCT in funzione della vita a scadenza, si ha un primo sintomo di cattiva percezione del titolo da parte del mercato (o di uso improprio delle regole di valutazione del reddito fisso).

La relazione tra *maturity* di tutti i CCT e prezzo di mercato è sintetizzata nella figura 7: è illustrato l'andamento del valore medio (linea tratteggiata) e dei valori minimo e massimo (linee continue) della vita residua dei titoli quotati in ciascuna giornata del periodo di osservazione.

FIGURA 7



I titoli che hanno la minima quotazione della giornata (la cui *maturity* è indicata con un cerchio) sono tendenzialmente quelli con vita residua massima e i titoli con quotazione massima (indicati con un quadrato) sono spesso quelli con vita residua minima; la linea della vita residua media separa quasi perfettamente i titoli con quotazione minima dai titoli con quotazione massima.

Questi risultati sono incongruenti con le caratteristiche di sostanziale indipendenza del prezzo dalla vita residua, prescritte dallo schema teorico del meccanismo d'indicizzazione.

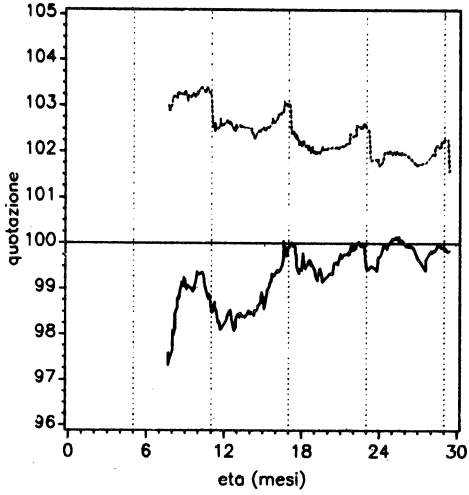
### *I sentieri dei prezzi*

L'analisi della relazione empirica tra quotazione e *maturity*, confrontata con la corrispondente relazione teorica, può essere approfondita seguendo l'andamento del prezzo dei CCT in funzione dell'età.

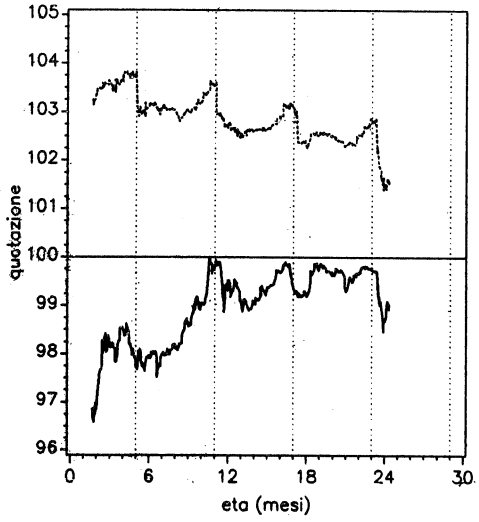
Sono stati considerati i CCT del tipo C6/A/2. I sentieri dei prezzi teorici seguono un *trend* decrescente al diminuire della vita a scadenza, per effetto della componente di prezzo dovuta allo *spread*; sempre a causa dello *spread* si mantengono (generalmente) al di sopra del valore nominale. L'andamento del prezzo teorico, depurato della componente dovuta allo *spread*, conferma anche per i meccanismi d'indicizzazione imperfetti (non sincroni) andamenti analoghi a quelli caratteristici dei titoli con indicizzazione sincrona (in particolare, è evidente l'accostamento alla parità teorica, in prossimità dell'istante di *fixing* delle cedole). Al contrario, le quotazioni dei titoli nel mercato telematico risultano sensibilmente sotto la pari. Per alcuni titoli il prezzo teorico al netto del dietimo e il corso secco osservato seguono un andamento analogo, pur con l'effetto di *mispricing*; risulta evidente la reazione delle quotazioni, "prevista" dalla teoria, agli esiti delle aste che determinano il *fixing* delle cedole; tuttavia il fenomeno non caratterizza altri titoli, identici per tipologia d'indicizzazione ma emessi in date diverse, per i quali si può rilevare un andamento in controtendenza dei due sentieri del prezzo. La corretta percezione da parte del mercato del meccanismo d'indicizzazione non sembra un'ipotesi interpretativa accreditabile, ma appare piuttosto un effetto casuale indotto da avvicinamenti alla parità nominale delle quotazioni che, nel secondo periodo di osservazione, si sono succeduti con andamenti ciclici (come è evidenziato dalla figura 2B). La tavola 1 illustra, relativamente a quattro CCT (del tipo C6/A/2) scelti come esempio, i sentieri dei prezzi di modello (linea tratteggiata) e di mercato (linea continua) rappresentativi degli andamenti osservati (i prezzi sono al netto del dietimo); sono evidenziati, con linee verticali punteggiate, gli istanti di *fixing* delle cedole. I CCT con codice ABI 13069 e 13084 possono essere considerati rappresentativi di andamenti della quotazione "in fase" col prezzo teorico; i CCT 13079 e 13089 forniscono esempio di sentieri di prezzo in "controfase".

TAVOLA 1

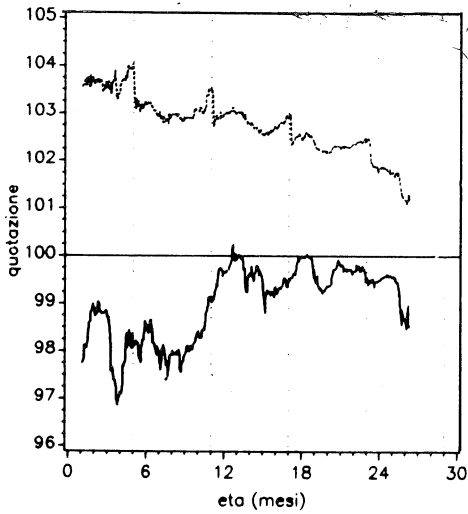
ABI 13069 - em. 1/1/90



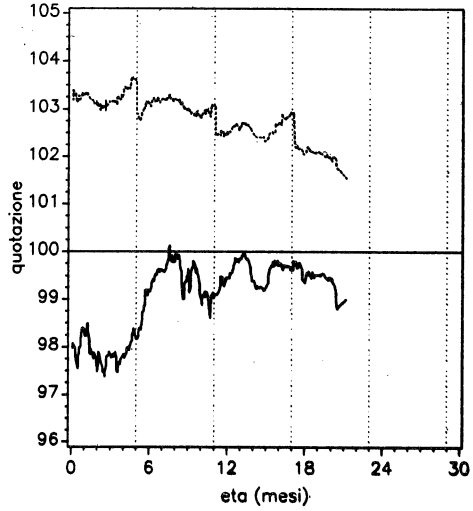
ABI 13084 - em. 1/7/90



ABI 13079 - em. 1/5/90



ABI 13089 - em. 1/10/90



### *Il costo del "disagio da incertezza"*

Nella logica di un mercato che non apprezza correttamente il meccanismo d'indicizzazione, il modello di valutazione può essere utilizzato (invece che per giustificare il *mispricing* in base a considerazioni di razionalità) per misurare, con posizione acritica, gli effetti di consuetudini e mode di gestione tipiche del reddito fisso.

Lo scostamento tra prezzo di modello e prezzo di mercato può essere attribuito al "disagio da incertezza", che pesa sul titolo a causa dell'aleatorietà del flusso di cedole; in questo senso il disallineamento può essere visto come prezzo per l'extra-rischio indotto dall'indicizzazione.

Il CCT è un portafoglio con componenti fisse (deterministiche: capitale a scadenza, flusso di *spread*, prima cedola nota, eventualmente seconda cedola nota) e componenti indicizzate (cedole aleatorie); da questo punto di vista, il prezzo  $P$  del titolo è definito, per la linearità, come somma del prezzo delle poste fisse  $F$  e indicizzate  $V$  ( $P = F + V$ ).

In ciascun istante, i prezzi  $F$  e  $V$  possono essere valutati separatamente utilizzando il modello di CIR, stimato sulla situazione del mercato (ad esempio,  $F$  è il valore attuale degli importi fissi, calcolato con i fattori di sconto ricavati dalla struttura per scadenza dei tassi di interesse stimata).

La componente di extra-rischio può essere definita come quel fattore  $k$ , compreso tra 0 e 1, che "abbatte" il prezzo del flusso indicizzato in modo congruo, dato il prezzo della parte fissa, al livello della quotazione ( $Q$ ). Per ciascuna *cross section* di prezzi  $\{Q_i\}$ , l'abbattimento può essere misurato in modo naturale adottando il modello  $Q_i = F_i + kV_i + \epsilon_i$ ; con le consuete ipotesi sui termini di errore  $\epsilon_i$ , il parametro  $k$  può essere stimato con una procedura di regressione lineare di  $V$  sugli scarti  $Q - F$ , osservati alla data di quotazione.

I valori di  $k$  stimati, relativamente alla tipologia C6/A/2, in ciascuna giornata del periodo di osservazione, presentano due diversi andamenti: sino al marzo 1991, i valori di  $k$  mostrano un'accentuata erraticità (imputabile alla volatilità delle quotazioni di mercato e alla scarsa numerosità delle osservazioni per *cross section*), comunque "centrata" intorno al livello equivalente a un'imposizione fiscale del 12.5%, con ciò confermando la possibilità di spiegare i prezzi osservati in base all'ipotesi dell'effetto fiscale;<sup>36</sup> nel secondo periodo, il

<sup>36</sup> Il meccanismo di compensazione legato alla presenza di segmenti fiscali comporterebbe una riduzione del prezzo di modello della componente a tasso variabile, che può essere approssimata, grossolanamente, con l'abbattimento dovuto all'aliquota fiscale.

coefficiente  $k$  appare posizionarsi a un livello stabilmente più alto.

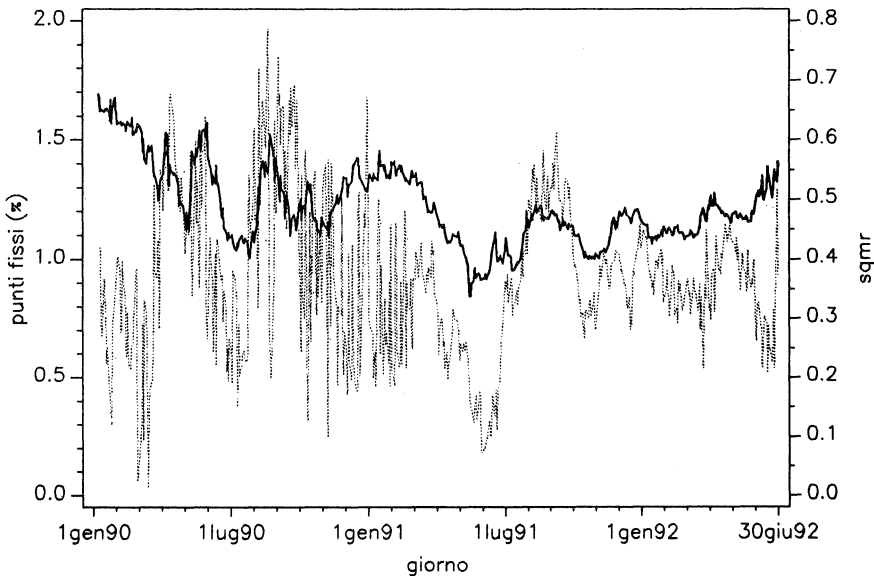
Nel linguaggio del tasso fisso, il livello stimato di abbattimento  $k$  può essere misurato in termini di rendimento aggiuntivo richiesto dal mercato (alla data di stima) per l'acquisto del titolo. Ipotizzando, conformemente a uno stile di valutazione in uso, tutte le cedole indicizzate uguali all'ultima cedola nota  $c$  (al netto della ritenuta fiscale e dello *spread*, che contribuisce in  $F$ ), la quantità  $R = 2c(1 - k)$  misura direttamente, in punti percentuali, il valore dell'incremento di rendimento, su base annua, richiesto per assumersi il peso dell'aleatorietà delle cedole.

L'andamento di  $R$  è riportato nella figura 8 (linea continua); è rappresentato anche, con linea tratteggiata, il corrispondente scarto quadratico medio dei residui (sqmr).

FIGURA 8

## CCT C6/A/2 - INCREMENTI DI RENDIMENTO

modello lineare a 1 parametro



Nell'intero periodo osservato, il premio medio richiesto in ogni singola giornata risulta compreso tra 0.85 (a metà maggio 1991) e 1.7 punti percentuali (all'inizio del periodo). La marcata variabilità dello scarto quadratico medio dei residui nel primo periodo (corrispondente a una forte instabilità nella qualità del *fitting*) è verosimilmente attribuibile alla scarsa numerosità dei CCT del tipo C6/A/2 quotati sul telematico fino all'inizio del 1991.

L'analisi dei residui evidenzia una correlazione negativa dello scarto tra prezzo osservato e prezzo stimato con la vita a scadenza dei titoli considerati: il modello tende cioè a sottovalutare i CCT con vita a scadenza più breve.

Per migliorare lo schema interpretativo, sembra plausibile ipotizzare che ciascuna cedola indicizzata venga valutata abbattendone il valore ideale (di equilibrio) per un coefficiente costante  $k$  e per un coefficiente  $k_2 = -\alpha m_1$ , proporzionale, tramite una costante  $\alpha$ , alla vita a scadenza  $m_1$  della cedola. Se si indica con  $S$  la somma dei valori ideali  $c_j$  delle cedole moltiplicati per  $m_p$ , il valore del generico titolo indicizzato risulta espresso da  $P = F + kV - \alpha S$ ; quindi i parametri  $k$  e  $\alpha$  possono essere stimati ancora con una procedura di regressione lineare, su ciascuna *cross section* di quotazioni  $\{Q_i\}$ , ipotizzando il modello:

$$Q_i = F_i + kV_i - \alpha S_i + \varepsilon_i$$

Come nel caso del modello a un solo parametro, i coefficienti stimati possono essere espressi in termini di rendimento aggiuntivo: il *mispricing* di ciascun CCT viene quindi misurato in una quota di punti percentuali fissi (determinati da  $k$ ) e in una quota percentuale richiesta per ogni anno di vita residua del titolo.

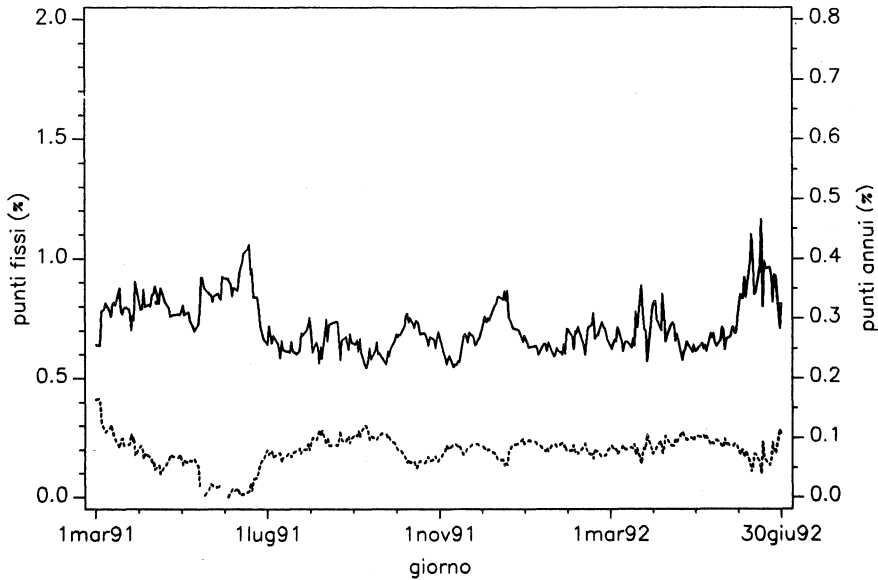
Il modello lineare a due parametri è stato stimato considerando la situazione giornaliera dei CCT del tipo C6/A/2, limitatamente al secondo periodo dell'orizzonte di osservazione (dal 1° marzo 1991 al 30 giugno 1992). Nelle 335 giornate esaminate, gli errori di stima sono sufficientemente bassi e stabili (lo *sqr* oscilla intorno al livello di 0.19 lire, con deviazione standard di 0.05); inoltre non risultano correlati a un livello significativo con la vita a scadenza dei titoli.

L'andamento dei punti fissi (linea continua) e dei punti per anno di vita residua (linea tratteggiata) richiesti in media in ciascuna giornata, come incremento di rendimento, è riportato nella figura 9.

Risulta che nel periodo i CCT sono stati valutati, in media, aggiungendo al rendimento richiesto per un BTP, con cedola uguale

Figura 9

CCT C6 /A/2 - INCREMENTI DI RENDIMENTO  
 modello lineare a 2 parametri



alla cedola nota, 70 punti base oltre a 8 punti base per ciascun anno di vita residua.<sup>37</sup>

## 6. Conclusioni

Il CCT è un titolo “nato senza teoria” che *a posteriori*, analizzato con i metodi della *new term structure theory*, ha mostrato una complessa fisionomia teorica.

<sup>37</sup> Naturalmente si potrebbe considerare il modello a un solo parametro  $Q_i = F_i - \alpha S_i + \varepsilon_p$ , in base al quale il *mispricing* viene misurato in termini di un incremento di rendimento linearmente crescente con la *maturity* (senza componente fissa). In questo caso, la stima effettuata sull'intero periodo di osservazione ha prodotto residui positivamente correlati con la vita a scadenza.

Le proprietà tecniche del prezzo e della rischiosità mostrano come il meccanismo d'indicizzazione protegga il titolo dal rischio di tasso di interesse e, in questo senso, rafforzano i giudizi originari sulla qualità dei CCT, che continuano a essere «titoli interessanti per il pubblico e per l'emittente»,<sup>38</sup> proprio in virtù dell'autoimmunizzazione.

Dall'analisi empirica del mercato secondario, svolta utilizzando la versione univariata del modello di CIR, risultano bizzarrie nel comportamento delle quotazioni, rispetto a quelli che dovrebbero essere i corretti andamenti, individuabili sulla base della teoria. Si rileva non soltanto un disallineamento tra livelli di prezzi, teorici e osservati, ma si individuano anche sentieri dei prezzi che, generalmente, non sembrano risentire degli effetti dell'indicizzazione, nel senso del richiamo alla parità teorica. I prezzi risultano sensibili alla vita residua dei titoli (negando con ciò la caratteristica di sostanziale indipendenza prescritta dalle proprietà teoriche) e spiegabili con la percezione di una più elevata rischiosità del titolo, nel senso dell'allungamento dell'orizzonte di liquidità.

I risultati empirici sembrano perciò corroborare l'ipotesi che il fattore di crisi dei prezzi dei CCT sia costituito dalla non corretta percezione del titolo da parte degli operatori: il disallineamento può essere interpretato come effetto delle mode di gestione che usano analizzare i titoli indicizzati con le consuetudini del reddito fisso, e misurato come costo del "disagio da incertezza", indotto dall'aleatorietà delle cedole.

Evidentemente, al fenomeno complesso del *mispricing* contribuiscono altre cause specifiche, che possono essere identificate ricercando i contrasti tra le ipotesi costruttive del modello di mercato, e le condizioni che caratterizzano il funzionamento del mercato reale. È credibile congetturare che la situazione fiscale e la pressione da offerta siano fattori significativi per spiegare il disallineamento dei

---

Questi modelli lineari, sia a uno che a due parametri, hanno soltanto una valenza descrittiva; comunque definiscono un atteggiamento metodologico più corretto in confronto ai tentativi di spiegare il *mispricing* con riparametrazioni dei modelli stocastici di *term structure*. Con la riparametrazione si finisce per attribuire ai parametri significati non coerenti con il quadro di riferimento teorico originario e possono essere introdotte distorsioni nella stima (poiché le stime su *cross section* consentono solo l'identificazione dei parametri aggiustati per il rischio, non è possibile effettuare un'interpolazione delle quotazioni dei CCT mantenendo vincolati i parametri ai valori determinati interpolando le quotazioni dei titoli a tasso fisso).

<sup>38</sup> MINISTERO DEL TESORO (1986), cap. VI.



prezzi. Restano sullo sfondo dell'analisi gli effetti di caduta dell'immagine del CCT, dovuti a fatti storici: crisi di illiquidità, crisi di credibilità dell'indice di riferimento;<sup>39</sup> tuttavia, nel periodo di osservazione, lo *spread* applicato alla cedola indicizzata ha compensato il disallineamento dei rendimenti annuali tra mercato primario e mercato secondario, nel senso che il *roll-over* garantito dai CCT è stato più conveniente dell'ideale *roll-over* rilevato sul mercato secondario.

Dal punto di vista tecnico, non sembra possibile evitare la sottovalutazione dei CCT con correzioni del meccanismo d'indicizzazione, passando ad esempio a titoli indicizzati con meccanismo sincrono ad alta frequenza cedolare (del tipo con cedole trimestrali, *lag* trimestrale, indicizzati al BOT a 3 mesi) poiché si è visto che questi cambiamenti alterano di poco i livelli di parità teorica. Semmai, l'indicizzazione con meccanismo sincrono, a causa della sua agevole leggibilità, potrebbe essere utilizzata col fine di orientare il mercato, per agevolare l'identificazione delle proprietà tecniche dei titoli indicizzati e accreditarle pubblicamente.

Più rilevante appare la necessità di eliminare il disallineamento dei rendimenti a 12 mesi tra mercato primario e mercato secondario, riducendo l'interazione tra segmentazione della domanda e interventi della Banca Centrale in sede d'asta. La garanzia dell'allineamento tra i rendimenti dei due mercati e una riduzione dello *spread* potrebbero rafforzare l'immagine del CCT.

Dal punto di vista della valutazione dei metodi, la scarsa rispondenza empirica del modello non può costituire un'evidenza specifica contro la versione univariata del modello di CIR o, più in generale, dei modelli stocastici di tipo diffusivo; semmai può fornire la base per criticare i modelli di arbitraggio univariati: ma su questa linea critica perderebbero di significato anche le relazioni (tradizionalmente ritenute espressive) tra tassi a pronti e tassi impliciti.

La proposta di migliorare la *performance* del modello aumentando il numero delle variabili base è valida dal punto di vista teorico, ma evoca gli esiti del dibattito sull'accuratezza degli schemi del mercato azionario: la generalità dei modelli non sempre è garanzia di potere esplicativo, lo sforzo incrementale richiesto per la stima dei parametri aggiuntivi non sempre è ripagato dall'*increased accuracy* del modello.<sup>40</sup> Nel caso particolare del mercato dei titoli di Stato,

<sup>39</sup> Cfr., ad esempio, ALESINA, PRATI, TABELLINI (1990).

<sup>40</sup> JARROW, RUDD (1983), p. 228.

inoltre, le sorgenti aggiuntive di rischio appaiono difficili da incorporare in modo espressivo in un modello che mantenga consistenza logica, senza indebolirne la struttura con ipotesi semplicistiche *ad hoc*.

L'approccio univariato, basato sull'ipotesi di assenza di arbitraggio, mantiene una sua validità come modello di riferimento. Già lo schema sincrono, d'altra parte, consente di identificare le proprietà essenziali dell'indicizzazione, con ciò fornendo l'esempio di come uno schema semplice ma robusto nei fondamenti possa «essere utile nello stabilire limiti logici alla retorica».<sup>41</sup>

*Roma*  
*Perugia*  
*Roma*

M. DE FELICE - F. MORICONI - M.T. SALVEMINI

---

<sup>41</sup> BRAY (1985), p. 187.

## APPENDICE 1

Si consideri un mercato obbligazionario che soddisfa le ipotesi usuali di mercato perfetto (non-frizionalità, completezza, impossibilità di arbitraggi non-rischiosi).

Sia  $t$  l'istante di valutazione (data corrente); si indicherà con  $v(t, s)$  il prezzo in  $t$  di uno *zero coupon bond* (*zcb*) unitario con scadenza in  $s$  ( $t \leq s$ ).

In condizioni di equilibrio, la funzione  $v(t, s)$  rappresenta il fattore di sconto, caratteristico del mercato, sull'intervallo temporale da  $t$  a  $s$  (naturalmente è  $v(t, s) \geq 0$  per ogni  $s$ ,  $v(s, s) = 1$  e  $v(t, s)$  funzione decrescente di  $s$ ). Il tasso annuo d'interesse relativo al periodo di tempo da  $t$  a  $s$  sarà dato da  $i(t, s) = v(t, s)^{-1/(s-t)} - 1$ ; come funzione di  $s$ ,  $i(t, s)$  fornisce la struttura per scadenza dei tassi d'interesse in vigore al tempo  $t$ .

Un flusso  $x$  composto da importi non negativi  $x_1, x_2, \dots, x_m$  esigibili alle scadenze  $t_1, t_2, \dots, t_m$  (con  $t \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$ ) avrà valore (prezzo) in  $t$  espresso nella forma:  $P(t, x) = \sum_{k=1}^m x_k v(t, t_k)$  e durata media finanziaria (*duration*, di Macaulay)  $D(t, x) = \sum_{k=1}^m (t - t_k) x_k v(t, t_k) / P(t, x)$ .

Si consideri la seguente:

*Definizione - Date le scadenze  $t, T, s$ , con  $t \leq T \leq s$ , si dice titolo di reinvestimento (unitario) da  $T$  a  $s$  uno *zcb*, contrattato in  $t$ , che paghi in  $s$  l'importo aleatorio  $X_{T,s} = 1 / v(T, s)$ .*

Si tratta, evidentemente, di un titolo che garantisce nell'istante  $s$  il valore di una lira capitalizzata da  $T$  a  $s$  al tasso di mercato in vigore in  $T$  (non noto al tempo  $t$ ).

Si ha il seguente:

*Teorema - Per escludere la possibilità di arbitraggi non-rischiosi al tempo  $t$ , il prezzo  $P(t, X_{T,s})$  di un titolo di reinvestimento da  $T$  a  $s$  deve essere uguale al prezzo di uno *zcb* deterministico con scadenza in  $T$ ; cioè deve essere  $P(t, X_{T,s}) = v(t, T)$ .*

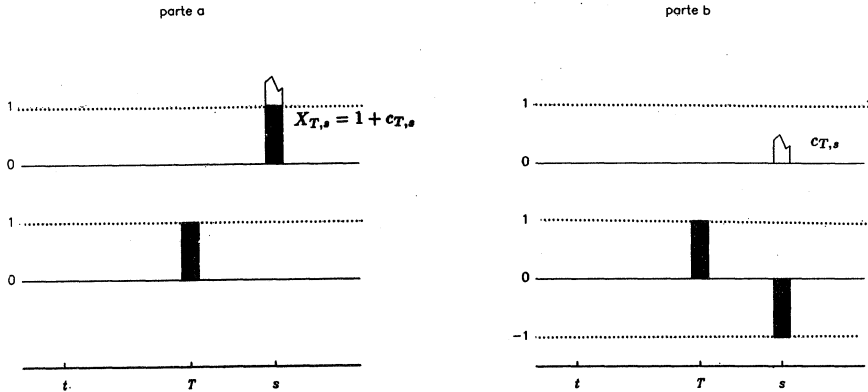
La dimostrazione è una conseguenza diretta dell'argomento di arbitraggio (Moriconi, 1992). È inoltre agevole dimostrare che la proprietà si conserva anche a seguito di perturbazioni aleatorie della struttura dei rendimenti.

Dal teorema risulta quindi che, nell'istante  $t$ , l'importo aleatorio " $X_{T,s}$  lire" esigibile in  $s$  è equivalente, sia in termini di prezzo che di sensitività a variazioni dei tassi di interesse, a "1 lira" certa esigibile in  $T$ .

In generale, essendo  $v(t, s) \leq 1$ , l'importo  $X_{T,s}$  può essere scomposto in una quota unitaria, certa (assimilabile per convenzione al capitale) e in una parte interesse (cedola) aleatoria. Sempre in base all'argomento di arbitraggio, la cedola  $c_{T,s} = [1 / v(T, s)] - 1$  è equivalente (in termini di valore) al portafoglio composto dal titolo che garantisce l'importo aleatorio  $X_{T,s}$  esigibile in  $s$  (con segno contabile positivo, in attivo) e da uno *zcb* unitario deterministico con scadenza in  $s$  (con segno contabile negativo, in passivo), quindi può essere replicata componendo due *zcb* unitari deterministici con scadenze in  $T$  (attivo) e

in  $s$  (passivo). La logica delle equivalenze è schematizzata nella figura A1: la parte a illustra il risultato del teorema, applicato all'importo aleatorio  $X_{T,s} = 1 + c_{T,s}$ ; nella parte b è rappresentata la conseguente equivalenza tra la cedola aleatoria e i due  $zcb$  deterministici.

FIGURA A1



Si faccia riferimento allo scadenziario (con periodicità unitaria, "annua")  $t_p, t_1 + 1, t_1 + 2, \dots, t_1 + m - 1$ , con  $t \leq t_p$ , e a un titolo che paghi  $m - 1$  cedole indicizzate a partire dalla scadenza  $t_2 = t_1 + 1$ . Precisamente, verrà considerato il titolo con valore facciale unitario che alla data  $t_k = t_1 + k - 1$  ( $k = 2, 3, \dots, m$ ) paghi la cedola indicizzata  $c_k = i(t_{k-1}, t_k)$ , di ammontare uguale agli interessi ottenuti investendo sul mercato una lira da  $t_{k-1}$  a  $t_k$  (nell'acquisto dello  $zcb$  di durata unitaria, titolo di riferimento, base dell'indicizzazione).

Poiché la quota indicizzata  $c_k$  di ciascuna cedola è replicabile da una coppia di  $zcb$  con scadenze in  $t_{k-1}$  e in  $t_k$  (con segno contabile positivo e negativo rispettivamente), il flusso  $X$  costituito dalle  $m - 1$  componenti indicizzate sarà equivalente a una coppia di  $zcb$  unitari deterministici in attivo e in passivo, con scadenza in  $t_1$  e in  $t_m$  (essendo nulla ciascuna componente del flusso netto, generato dai portafogli replicanti le quote indicizzate, sulle scadenze intermedie), come mostra la figura A2 (parte a), nel caso di 4 scadenze.

Risulta immediatamente che il flusso  $X$  delle componenti indicizzate, riferito a un capitale nominale  $C$ , ha valore (prezzo) in  $t$ :

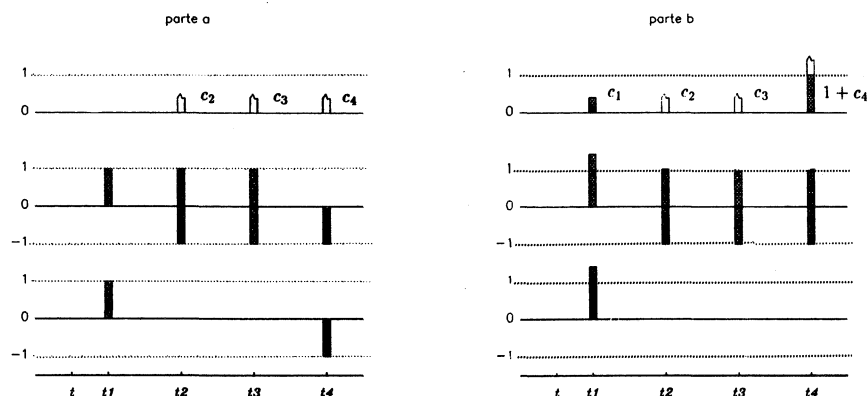
$$P(t, X) = C [v(t, t_1) - v(t, t_m)]$$

e durata media finanziaria:

$$D(t, X) = \frac{(t_1 - t) v(t, t_1) - (t_m - t) v(t, t_m)}{v(t, t_1) - v(t, t_m)}$$

Quando risulta  $v(t, t_1) / v(t, t_m) < (t_m - t) / (t_1 - t)$  (come è nei casi di interesse pratico) la *duration* assume valori negativi.

FIGURA A2



Se al flusso degli importi indicizzati si aggiunge l'importo (certo)  $C$  di rimborso del capitale a scadenza (in  $t_m$ ), il flusso  $X$  che ne risulta sarà equivalente allo *zcb* deterministico di importo  $C$ , esigibile in  $t_1$  (come si dimostra immediatamente continuando l'analogia fisica della figura A2, parte b); quindi si ha:  $P(t, X) = C v(t, t_1)$  e  $D(t, X) = t_1 - t$ .

Se si considera anche il peso della prima cedola nota (di importo  $c_1$  in  $t_1$ ), si avrà ovviamente:  $P(t, X) = (C + c_1) v(t, t_1)$  e sempre  $D(t, X) = t_1 - t$ , poiché, in questo caso, il flusso di importi  $X$  che descrive il titolo indicizzato equivale a uno *zcb* con valore di rimborso  $C + c_1$  e scadenza in  $t_1$ .

## APPENDICE 2

Si considera un modello del mercato finanziario "diffusivo" ove la variabile base (unica fonte d'incertezza) sia il "tasso" locale d'interesse (*spot rate*)  $r(t)$ , con evoluzione descritta dall'equazione differenziale stocastica di Ito:

$$dr = f(r, t) dt + g(r, t) dZ,$$

essendo  $f$  e  $g^2$  i parametri infinitesimi del processo di diffusione  $\{r(t)\}$ , e  $\{Z(t)\}$  il moto browniano standard.<sup>1</sup> Nelle ipotesi standard della *new term structure theory*, il prezzo al tempo  $t$ ,  $P(t)$ , di un generico titolo *irs* è funzione della variabile di stato  $r(t)$ , del tempo e del vettore  $c$  dei parametri contrattuali:

$$P(t) = P(r, t; c);$$

l'equazione generale di valutazione, ottenuta con argomenti di arbitraggio, è data dall'equazione differenziale:

$$(1) \quad P_t + (f + qg) P_r + \frac{1}{2} g^2 P_{rr} - r P = 0,$$

dove  $q = q(r, t)$  è una funzione (indipendente da  $c$ ) che esprime la differenza di rendimento atteso per unità di rischio e definisce il "prezzo di mercato del rischio".

Dalla (1) si può ricavare il prezzo al tempo  $t$ ,  $v(r, t; s)$ , di uno *zcb* ordinario con scadenza al tempo  $s$  ( $t \leq s$ ), ponendo la condizione al contorno:  $v(r, s; s) = 1$ . La  $v(r, t; s)$ , come funzione di  $s$ , descrive la struttura dei corsi caratteristica del mercato al tempo  $t$ ; la struttura dei rendimenti (*intensità di rendimento*) è data da:  $b(r, t; s) = -\log v(r, t; s) / (s - t)$ ; il rendimento di lungo periodo (asintotico)  $r_L$  è definito come:  $r_L = \lim_{s \rightarrow \infty} b(r, t; s)$ .

Lo schema di riferimento per la valutazione dei CCT si può impostare assumendo che le cedole  $I_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) siano pagate alle scadenze  $t_k = t + k\theta$ , con  $\theta > 0$ , e siano determinate conformemente al criterio:

$$I_k = \begin{cases} C \left[ \frac{1}{v(T_k, T_k + \mu)} - 1 + \sigma \right], & \text{se } T_k > t, \\ C \left[ \frac{1}{v(t, t + \mu)} - 1 + \sigma \right], & \text{se } T_k \leq t, \end{cases}$$

dove:

$$T_k = t_k - \lambda, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

e  $\mu > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\sigma \geq 0$  (le cedole sono *zcb* stocastici).

In accordo con questa regola, ciascuna cedola dipende dal prezzo di emissione di un BOT di *maturity*  $\mu$ , osservato  $\lambda$  unità di tempo prima di ciascun

<sup>1</sup> Il "tasso" locale è, più precisamente, un'intensità istantanea (misurata quindi in anni<sup>-1</sup>); il corrispondente valore del tasso d'interesse, su base annua e in punti percentuali, è dato da:  $i(t) = 100 (e^{r(t)} - 1)$ .

pagamento; l'importo della cedola  $I_k$  è dato dal tasso di rendimento  $i(T_k, \mu)$  più un margine (*spread*)  $\sigma$ .

Il titolo indicizzato è quindi rappresentato dal vettore di importi aleatori:

$$\mathbf{X} = (I_1, I_2, \dots, I_m + C),$$

pagati alle date  $t_1, t_2, \dots, t_m$ , e può essere considerato (e trattato) come un portafoglio di *zcb* stocastici.

La funzione di prezzo è data da:

$$(2) \quad P(r, t; \mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m P(r, t; T_k, t_k, I_k) + C v(r, t; t_m) \\ = C \left\{ \sum_{k=1}^m [\beta(r, t; T_k, t_k, \mu) - (1 - \sigma) v(r, t; t_k)] + v(r, t; t_m) \right\},$$

essendo:

$$(3) \quad \beta(r, t; T, s, \mu) = \mathbf{E}_t \left[ \frac{v(r, T; T + \lambda)}{v(r, T; T + \mu)} e^{-S(t, T)} \right],$$

dove  $S(t, s)$  è l'integrale stocastico:

$$S(t, s) = \int_t^s r(u) du + \frac{1}{2} \int_t^s q^2(r(u), u) du - \int_t^s q(r(u), u) dZ(u),$$

ed  $\mathbf{E}_t$  rappresenta l'aspettativa calcolata con la distribuzione di probabilità che descrive il processo  $\{r(t)\}$ , specificata dal valore dello *spot rate* osservato al tempo  $t$ .

Utilizzando l'importo *ex ante* della cedola stocastica  $I_k$ :

$$z(r, t; T_k, t_k, I_k) = \frac{P(r, t; T_k, t_k, I_k)}{v(r, t; t_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

il prezzo del flusso indicizzato può essere espresso nella forma:

$$P(r, t; \mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m v(r, t; t_k) z(r, t; T_k, t_k, I_k) + C v(r, t; t_m).$$

Il rischio base è dato (usando una notazione semplificata) da:

$$\Omega(r, t; \mathbf{X}) = - \frac{P_r(r, t; \mathbf{X})}{P(r, t; \mathbf{X})} \\ = - \frac{1}{P} \left\{ \sum_{k=1}^m v_r(t_k) z(t_k) + C v_r(t_m) + \sum_{T_k > t} v(t_k) z_r(t_k) \right\},$$

poiché se  $T_k \leq t$  la cedola *ex ante* è indipendente da  $r$ . In particolare, per uno *zcb* con prezzo  $v(r, t; s)$  il rischio base è dato da:  $\phi(r, t; s) = -v_r(r, t; s)/v(r, t; s)$ .

Il rischio base (complessivo)  $\Omega(r, t; \mathbf{X})$  può essere rappresentato distinguendo la rischiosità di sconto e la rischiosità di importo, nella forma:

$$\Omega(r, t; \mathbf{X}) = \Phi(r, t; \mathbf{X}) + \Gamma(r, t; \mathbf{X}),$$

dove la rischiosità di sconto è data da:

$$\Phi(r, t; \mathbf{X}) = - \frac{1}{W} \left[ \sum_{k=1}^m \varphi(t_k) v(t_k) z(t_k) + \varphi(t_m) v(t_m) C \right]$$

e la rischiosità d'importo (cedola) da:

$$\Gamma(r, t; \mathbf{X}) = - \frac{1}{W} \sum_{T_k > t} v(t_k) z_r(t_k).$$

Se  $\lambda = \mu = \theta$  e  $\sigma = 0$ , si riottengono i risultati dello schema sincrono (Appendice 1). Risulta infatti, per ogni  $k$ :

$$\beta(r, t; T_k, t_k, \lambda) = v(r, t; T_k) = v(r, t; t_{k-1}),$$

essendo  $t_0 = t$ . Quindi la cedola *ex ante* è esprimibile nella forma:

$$z(r, t; T_k, t_k, I_k) = C \left[ \frac{v(r, t; t_{k-1})}{v(r, t; t_k)} - 1 \right] = C j(t; t_{k-1}, t_k),$$

dove  $j(t; T, s)$  rappresenta il tasso implicito al tempo  $t$ , per il periodo tra  $T$  e  $s$ .

Dall'equazione (2), si ha:

$$P(r, t; \mathbf{X}) = C,$$

per cui il titolo indicizzato è quotato alla pari, come se fosse un titolo a tasso fisso con cedole "forward".

Per il rischio base si ha:

$$\Omega(r, t; \mathbf{X}) = \varphi(r, t; t_1),$$

che corrisponde alla *duration* stocastica:

$$D = t_1 - t = \theta.$$

Nella versione univariata del modello di struttura per scadenza dei tassi di interesse, proposta da Cox, Ingersoll e Ross, si assume che il mercato sia caratterizzato da un processo di diffusione per lo *spot rate* con parametri:

$$f(r, t) = \alpha (\gamma - r), \quad \alpha, \gamma > 0,$$

$$g(r, t) = \rho \sqrt{r}, \quad \rho > 0;$$

e da una funzione prezzo di mercato del rischio:

$$q(r, t) = \frac{\pi \sqrt{r}}{\rho}, \quad \pi \text{ costante.}$$

Sotto queste ipotesi, l'equazione fondamentale di valutazione (1) si specifica nella forma:

$$(4) \quad P_t + [\alpha \gamma - (\alpha - \pi) r] P_r + \frac{1}{2} \rho^2 r P_{rr} - r P = 0.$$



Il fattore di sconto (ottenuto dalla (4) con la condizione al contorno  $v(r, s; s) = 1$ ) è dato da:

$$v(r, t; s) = A(t, s) e^{-r(t) B(t, s)},$$

dove:

$$A(t, s) = \left\{ \frac{2de^{(\alpha - \pi + d)(s-t)/2}}{(\alpha - \pi + d)e^{d(s-t)} - 1 + 2d} \right\}^{2\alpha\gamma/\rho^2},$$

$$B(t, s) = \frac{2[e^{d(s-t)} - 1]}{(\alpha - \pi + d)[e^{d(s-t)} - 1] + 2d}$$

e

$$d = \{(\alpha - \pi)^2 + 2\rho^2\}^{1/2}.$$

Il tasso asintotico di lungo periodo è costante:  $r_L = 2\alpha\gamma / (d + \alpha - \pi)$ .

La forma esplicita della funzione  $\beta$  può essere ottenuta dall'equazione (4), con la condizione al contorno:

$$\beta(r, T; T, s, \mu) = \frac{v(r, T; s)}{v(r, T; T + \mu)}$$

(che è ottenuta dalla (3) ponendo  $t = T$ ).<sup>2</sup> La soluzione, ricavata in Castellani (1988), è data da:

$$\beta(r, t; T, s, \mu) = M(t; T, s, \mu) e^{-r(t) N(t; T, s, \mu)},$$

dove:

$$M(t; s) = \frac{A(T, s)}{A(T, T + \mu)}$$

$$\left[ \frac{2de^{(\alpha - \pi + d)(T-t)/2}}{(\alpha - \pi + d)(e^{d(T-t)} - 1) + 2d + \rho^2 \Delta B [e^{d(T-t)} - 1]} \right]^{2\alpha\gamma/\rho^2},$$

$$N(t; s) = \frac{2(e^{d(T-t)} - 1) - \Delta B [(\alpha - \pi - d)(e^{d(T-t)} - 1) - 2d]}{(\alpha - \pi + d)(e^{d(T-t)} - 1) + 2d + \rho^2 \Delta B [e^{d(T-t)} - 1]}$$

e:

$$\Delta B = B(T, s) - B(T, T + \mu).$$

M.D.F. - F.M. - M.T.S.

<sup>2</sup> Per precisazioni e approfondimenti cfr. DE FELICE, MORICONI (1991a).

## BIBLIOGRAFIA

- ALESINA, A., PRATI, A., TABELLINI, G. (1990), "Public Confidence and Debt Management: a Model and a Case Study of Italy", in: Dornbusch R., Draghi M. (eds.), *Public Debt Management: Theory and History*, Cambridge, Cambridge University Press.
- BANCA COMMERCIALE ITALIANA (1984), *Tendenze Monetarie*, n. 46, marzo.
- BANCA COMMERCIALE ITALIANA (1988), *Tendenze Monetarie*, n. 56, gennaio.
- BANCA D'ITALIA (1991), *Relazione Annuale*, Roma.
- BARONE, E., FOLONARI, F. (1992), "La valutazione dei titoli del Tesoro a tasso variabile: i rendimenti a termine dei BOT impliciti nei prezzi dei BTP", dattiloscritto, maggio 1992.
- BARONE, E., CUOCO D., ZAUTZIK, E. (1989), "La struttura dei rendimenti per scadenza secondo il modello di Cox, Ingersoll e Ross: una verifica empirica", *Temi di discussione*, Banca d'Italia, 118.
- BERNAREGGI, G. M. (1986), "Effetti della tassazione dei titoli pubblici in Italia", *Economia Pubblica*, 4-5.
- BIANCHI, B. (1992), "Mercato finanziario italiano nel 1991: aspetti strutturali ed evolutivi", *Rivista Milanese di Economia*, 41, pp. 53-68.
- BRAY, M. (1985), "Rational Expectation, Information and Asset Market: An Introduction", *Oxford Economic Papers*, 37, 2.
- BROWN, R. H., SCHAEFER, S. M. (1988), *Testing the Cox, Ingersoll & Ross Model on British Government Index-Linked Securities*, London Business School (IFA-109-88).
- BUTTIGLIONE, L., PRATI, A. (1991), "La scelta del meccanismo di collocamento dei titoli di Stato: analisi teorica e valutazione dell'esperienza italiana", *Temi di discussione*, Banca d'Italia, 146.
- CASTELLANI, G. (1988), "Soluzione di equazioni differenziali del prezzo di titoli obbligazionari", Università di Roma "La Sapienza", dattiloscritto.
- CASTELLANI, G., DE FELICE, M., MORICONI, F. (1989), "Price and Risk of Variable Rate Bonds: An Application of the Cox, Ingersoll, Ross Model to Italian Treasury Credit Certificates", Research Group on "Models of the Term Structure of Interest Rates", *Working Paper* no. 1.
- CASTELLANI, G., DE FELICE, M., MORICONI, F. (1992), "Single-factor Diffusion Models for the Global Analysis of the Italian Government Securities Market: Normalized Prices and Efficient Frontier", Research Group on "Models of the Term Structure of Interest Rates", *Working Paper* no. 6.
- COX, J.C., INGERSOLL, J.E., ROSS, S.A. (1980), "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts", *Journal of Finance*, 2.
- COX, J.C., INGERSOLL, J.E., ROSS, S.A. (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 2.
- DE FELICE, M., MORICONI, F. (1991a), *La teoria dell'immunizzazione finanziaria. Modelli e strategie*, Bologna, Il Mulino.

- DE FELICE, M., MORICONI, F. (1991b), "Uno schema per la valutazione e la gestione di titoli del debito pubblico", in *Ricerche Applicate e Modelli per la Politica Economica*, Roma, Banca d'Italia.
- DERMODY, J. C., ROCKAFELLAR, R. T. (1991), "Cash Stream Valuation in the Face of Transaction Costs and Taxes", *Mathematical Finance*, 1, 1.
- DRUDI, F., SCALIA, A. (1992), "The Valuation of Option on Fixed and Floating Coupon Bonds: An Empirical Investigation of the Italian OTC Market", Banca d'Italia, Servizio Studi, dattiloscritto.
- DUFFIE, D. (1992), *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton, Princeton University Press.
- HODGES, S.D., SCHAEFER, S.M. (1977), "A Model for Bond Portfolio Improvement", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, pp. 243-260.
- INGERSOLL, J.E. (1987), *Theory of Financial Decision Making*, Totowa, Rowman & Littlefield.
- JARROW, R.A., RUDD, A. (1983), *Option Pricing*, Homewood, Irwin.
- MERTON, R.C. (1990), *Continuous-Time Finance*, Cambridge, Basil Blackwell.
- MINISTERO DEL TESORO (1986), *Ricchezza finanziaria, debito pubblico e politica monetaria nella prospettiva dell'integrazione internazionale*, Roma.
- MINISTERO DEL TESORO (1989), *Rapporto del Comitato Scientifico Consultivo sul Debito Pubblico*, Roma.
- MONTI, E., ONADO, M. (1989), *Il mercato monetario e finanziario in Italia*, Bologna, Il Mulino.
- MORICONI, F. (1991), "Immunizzazione semideterministica di portafogli di CCT", Gruppo di Ricerca su "Modelli di struttura per scadenza dei tassi di interesse", *Working Paper* no. 4.
- OECD (1987), *Asset and Liability Management By Banks* (by R. Harrington), Paris, Organization for Economic Co-Operation and Development.
- RISTUCCIA, M.S. (1991), "La 'nuova' teoria della struttura per scadenza dei tassi di interesse. Un'applicazione del modello di Cox, Ingersoll e Ross al mercato dei Certificati di Credito del Tesoro", Tesi di Laurea, Università di Roma "La Sapienza".
- ROVELLI, R. (1991), "Determinants of Interest Rates on Italian Government Bonds and the Valuation of Floating Rate Bonds", *Quaderno* n. 54, Università Bocconi, Centro di Economia Monetaria e Finanziaria "Paolo Baffi".
- SALVEMINI, M.T. (1992a), *Le politiche del debito pubblico*, Bari, Laterza.
- SALVEMINI, M.T. (1992b), "Dentro il Fondo del Tesoro più chiarezza ma non miracoli", *Il Sole 24 Ore*, n. 281, 15 ottobre.
- SPAVENTA, L. (1988), "Adesso serve il coraggio di innovare", *La Repubblica*, n. XX, 15 aprile.