

Modelli formali della crisi

GIANCARLO GANDOLFO*

1. Introduzione

Sulla crisi sono state scritte molte migliaia di pagine, per lo più di carattere discorsivo. Assai pochi sono, infatti, gli studi che affrontano la questione con modelli formali. A mio avviso ciò dipende dal fallimento della teoria economica *mainstream*, di solito prodiga di modelli, che in questa occasione si è mostrata del tutto incapace di prevedere la crisi. Basti ricordare che nel 2003 Robert Lucas (premio Nobel per l'economia 1995) nel suo Presidential Address all'American Economic Association affermava che "la macroeconomia ha avuto successo: il suo problema centrale, quello della prevenzione delle depressioni, è stato risolto a tutti gli effetti pratici". E un anno dopo Ben Bernanke, già professore a Princeton e all'epoca membro del Federal Reserve Board (di cui poi sarebbe diventato Presidente) in un discorso tenuto al Convegno annuale della Eastern Economic Association, intitolato *The Great Moderation*, affermava che la moderna politica economica aveva sostanzialmente risolto il problema del ciclo economico.

Purtroppo l'opinione corrente identifica gli economisti *mainstream* con gli economisti *tout court* sicché il discredito ricade sull'intera categoria. Invece, alcuni la crisi l'avevano prevista! Fra i tanti che avevano lanciato grida d'allarme (purtroppo inascoltate) mi limiterò a prendere in considerazione soltanto alcuni che hanno affrontato la questione con modelli formali.

A questo proposito mi sembra essenziale distinguere tra le cause di tipo tecnico-finanziario che hanno scatenato la crisi negli Stati Uniti e le cause di tipo macroeconomico che spiegano anche la trasmissione internazionale della crisi stessa.¹

* Sapienza Università di Roma, Facoltà di Economia. E-mail: kunz@gandolfo.org

¹Sono grato alla dott.ssa Beatrice Pirrò per aver attirato la mia attenzione sui saggi di cui riferisco nei paragrafi seguenti.

2. Le cause tecnico-finanziarie della crisi: la formula assassina

Recipe for Disaster: The Formula that Killed Wall Street è il titolo di un articolo a firma Felix Salmon apparso nel numero di marzo 2009 del mensile statunitense *Wired*.

Nel 2000 il matematico cinese David X. Li, emigrato in Canada, pubblicò un articolo innovativo dal titolo *On Default Correlation: A Copula Function Approach*, nel quale studiava la correlazione fra le probabilità di default di due crediti rischiosi.

Detto in parole povere, una funzione copula accoppia le probabilità individuali di due eventi A e B per ottenere un unico numero che esprima la probabilità che A e B si verifichino simultaneamente.

Per capire meglio la questione può essere utile un esempio tratto dal suddetto saggio di Salmon. Pensiamo a qualcosa di semplice, come una ragazzina delle elementari: chiamiamola Alice. Supponiamo che la probabilità che i suoi genitori divorzino entro un anno sia pari al 5 per cento, il rischio che prenda i pidocchi sia pari al 5 per cento, la possibilità che veda un'insegnante scivolare su una buccia di banana sia pari al 5 per cento, e la probabilità che vinca la gara di ortografia della propria scuola sia anch'essa pari al 5 per cento. Se gli investitori stessero trattando titoli basati sulla possibilità che una di queste cose capiti ad Alice, starebbero tutti trattando più o meno allo stesso prezzo.

Ora consideriamo due bambine invece di una, non solo Alice ma anche la sua compagna di banco, Britney, e poniamoci le seguenti domande. Se i genitori di Britney divorziano, quali sono le probabilità che anche i genitori di Alice divorzino? Ancora circa il 5 per cento: la correlazione qui è vicina allo zero. Ma se Britney prende i pidocchi, le probabilità che anche Alice li prenda sono molto più alte, diciamo il 50 per cento: la correlazione è salita intorno allo 0,5. Se Britney vede un'insegnante scivolare su una buccia di banana, quante sono le probabilità che anche Alice la veda? Molto alte, dato che le due bambine sono sedute una accanto all'altra: potrebbero anche arrivare fino al 95 per cento, il che significa che la correlazione è vicina a 1. E se Britney vince la gara di ortografia, la probabilità che la vinca Alice è zero, il che significa che la correlazione è negativa: -1. Se gli investitori stessero commerciando

in titoli basati sulla possibilità che le cose accadano sia ad Alice sia a Britney, i prezzi sarebbero molto diversi tra loro, visto che le correlazioni variano notevolmente.

Ma la correlazione è una questione complicata. Anche solo per misurare le probabilità iniziali del 5 per cento occorre raccogliere grandi quantità di dati disparati e sottoporli a tutta una serie di analisi statistiche e di errore. Cercare di determinare la probabilità condizionata – la probabilità che Alice prenda i pidocchi se Britney li ha presi – è ancora più difficile, visto che quel tipo di dati è molto più raro. A causa della scarsità di dati storici, è probabile che gli errori siano molto più grandi.

Nel mondo dei mutui è ancora più difficile. Qual è la probabilità che il valore di una certa casa diminuisca? Si può guardare alla storia passata dei prezzi degli immobili per farsi un'idea, ma sicuramente ciò non basta. Ancora più difficile è determinare la probabilità che se una casa in una regione perde valore, lo perda anche una casa simile in un'altra regione.

Qui entra in gioco Li. La sua formula² è

$$\Pr[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2\{\Phi^{-1}[F_A(1)], \Phi^{-1}[F_B(1)], \gamma\}$$

ove

T_A = tempo di sopravvivenza dell'attività finanziaria A , ovvero sia tempo intercorrente da ora alla data in cui si ha il default di detta attività; l'unità di tempo è posta uguale ad un anno, quindi $T_A < 1$ indica un tempo di sopravvivenza inferiore ad un anno;

²Richiamiamo qui alcune definizioni di base della teoria della probabilità:

x variabile casuale

$F(x)$ funzione di distribuzione, esprime la probabilità che una variabile stocastica X abbia un valore uguale o minore di x . Chiamata anche funzione di distribuzione cumulativa

$f(x)dx$ probabilità che x giaccia nell'intervallo infinitesimo dx , ove $f(x)$ è la densità di probabilità o funzione di probabilità della distribuzione. Si ha $\int_{l_1}^{l_2} f(x)dx = 1$, ove l_1, l_2 possono anche essere $-\infty, +\infty$.

$f(x, y)$ funzione di probabilità congiunta di due variabili stocastiche x, y . Allora $f(x, y)dxdy$ rappresenta la probabilità che x giaccia nell'intervallo $(x, x + dx)$ e simultaneamente y si trovi nell'intervallo $(y, y + dy)$. Conseguentemente

$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy$ rappresenta la probabilità che simultaneamente x giaccia nell'intervallo a, b e y nell'intervallo c, d .

T_B = tempo di sopravvivenza dell'attività finanziaria B ;

$Pr[\dots]$ = probabilità congiunta di default delle due attività finanziarie prima di un anno;

Φ_2 = funzione cumulativa di distribuzione normale bivariata con parametro di correlazione γ ;

Φ^{-1} = inversa di una funzione di distribuzione normale univariata;

F_A, F_B = funzioni di distribuzione dei tempi di sopravvivenza T_A, T_B .

Il problema è di come determinare i rischi di insolvenza. L'innovazione di Li fu questa: invece di aspettare di avere messo assieme un numero sufficiente di dati storici sull'insolvenza, che sono rari nel mondo reale, si potevano usare i dati storici dei prezzi del mercato dei CDS.³ Se il costo di un Credit Default Swap si alza, significa che si è alzato il rischio d'insolvenza. David X. Li in sostanza utilizzò come scorciatoia i prezzi dei CDS al posto dei dati d'insolvenza del mondo reale, dando implicitamente per scontato che i mercati finanziari, e i mercati CDS in particolare, potessero assegnare un prezzo corretto al rischio d'insolvenza. *Questa fiducia nei mercati è tipica dell'economia mainstream, ma del tutto opinabile se si guarda la realtà.*

Un secondo elemento di opinabilità è che Li dava per scontato che la correlazione fosse una costante invece che qualcosa di instabile.

Sebbene questi elementi critici venissero segnalati (Paul Willmott, un analista finanziario; Darrell Duffie, professore di finanza quantitativa a Stanford; Paul Embrechts, professore di matematica all'ETH di Zurigo, ed altri),⁴ la formula di Li (con le semplificazioni suddette), data la sua comodità e facilità di calcolo, venne universalmente adottata da banche e analisti finanziari.

In finanza non si può mai del tutto ridurre il rischio: si può solamente tentare di mettere in piedi un mercato in cui chi non vuole il rischio lo

³Rammentiamo che un Credit Default Swap è sostanzialmente un'assicurazione contro il rischio di insolvenza di un debitore. Il creditore (assicurato) paga un premio all'emittente del CDS (assicuratore), il quale si impegna a risarcire l'assicurato se il debitore non onora il debito che ha verso l'assicurato. I CDS sono negoziati sul relativo mercato. Il costo di un CDS (cioè il premio) incorpora la valutazione del rischio, per cui quando tale costo sale vuol dire che il rischio di insolvenza è aumentato.

⁴Cfr. Donnelly e Embrechts, 2009.

vende a chi invece vuole rischiare. Invece gli operatori usavano il modello di Li per convincersi che non c'era alcun rischio, quando in effetti non si correva pericolo soltanto per il 99 per cento del tempo. Per il restante 1 per cento, il rischio era invece esplosivo e poteva facilmente distruggere tutti i guadagni passati.

La formula di Li era usata per dare un prezzo a centinaia di miliardi di dollari in CDO (Collateralized Debt Obligations)⁵ carichi di mutui ipotecari. E siccome la formula usava i prezzi dei CDS per calcolare la correlazione, doveva per forza limitarsi a osservare il periodo di tempo in cui quei Credit Default Swaps erano esistiti: meno di dieci anni, un periodo in cui i prezzi delle case erano in crescita costante. Naturalmente, le correlazioni d'insolvenza erano molto basse in quegli anni. Ma quando il boom dei mutui cessò e i prezzi delle case cominciarono a crollare in tutto il paese, le correlazioni aumentarono. Nessuno però voleva fermare la creazione dei CDO e le grandi banche continuarono a costruirne di nuovi, ricavando i propri dati di correlazione da un periodo in cui il mercato immobiliare saliva e basta. La ragione era che i risultati arrivavano da modelli di calcolo "a scatola nera", molto difficili da sottoporre al fiuto del senso comune.

Non si può biasimare Li, è stato detto. Dopotutto, ha solo inventato il modello. Invece, dovremmo incolpare i banchieri che lo hanno male interpretato e applicato. Non siamo d'accordo con questa benevola assoluzione. Come abbiamo detto sopra, fu proprio il suggerimento di Li di usare i prezzi dei CDS per determinare i rischi di insolvenza a dare l'avvio ai guai. Siamo invece d'accordo quando si dice che il vero pericolo non è nato perché un certo trader ha adottato il modello, ma perché la *totalità* dei traders lo ha fatto. Nei mercati finanziari, quando tutti fanno la stessa cosa, è inevitabile che si arrivi a una bolla e alla sua esplosione.

⁵Rammentiamo che un CDO è un titolo obbligazionario garantito da crediti ed emesso da una società appositamente creata a cui vengono cedute le attività poste a garanzia. I CDO sono solitamente garantiti da un portafoglio composto da prestiti, titoli obbligazionari etc., e suddivisi in più categorie (tranche), a seconda della loro priorità di rimborso. Qualora i flussi di cassa generati dai crediti posti a garanzia del debito non siano sufficienti a far fronte al pagamento degli interessi sul CDO o al suo rimborso, vengono effettuati prima i pagamenti relativi alle categorie con priorità più alta e, solo in via subordinata, quelli relativi alle categorie con minore priorità.

3. Le cause di tipo macroeconomico e la trasmissione internazionale della crisi

Tra i vari modelli formali che spiegano la trasmissione internazionale della crisi⁶ ho scelto quello di Krugman, uno dei pochi economisti di grande prestigio (vincitore del premio Nobel per l'Economia nel 2008) ad aver messo sull'avviso che la crisi si stava approssimando (Krugman, 2000, 2009). Dopo aver osservato che il tradizionale moltiplicatore in economia aperta non è in grado di spiegare la trasmissione internazionale della crisi, Krugman introduce il moltiplicatore finanziario internazionale (*international finance multiplier*), in base al quale le variazioni dei prezzi delle attività finanziarie vengono trasmesse internazionalmente attraverso i loro effetti sui bilanci di istituzioni finanziarie aventi alto leverage.

3.1. Il modello in economia chiusa

Per comprenderne il meccanismo occorre prima considerare un'economia chiusa, nella quale esiste un titolo rischioso (tipo titoli garantiti da ipoteca su immobili), la cui offerta è un dato A . Ci sono due categorie di detentori di questo titolo: il pubblico generico e le istituzioni finanziarie con alto leverage, d'ora in poi chiamate HLI.

Supponiamo che la domanda del pubblico sia una funzione decrescente del prezzo dell'attività in questione:

$$\hat{G} = G(q), \quad G'(q) < 0, \quad (1)$$

mentre le HLI si comportano in maniera assai diversa. Indicando con N il loro stock iniziale dell'attività rischiosa e con D il loro debito corrente, il capitale proprio E risulta uguale (in base alla valutazione di mercato) a

$$E = qN - D. \quad (2)$$

Si ipotizza poi che la dimensione dei bilanci delle HLI sia vincolata da

⁶I principali modelli sono: G. Fontana and M. Setterfield, 2009; P. Krugman, 2008; C. Martin and C. Milas, 2009.

un rapporto massimo di leverage λ , per cui il *valore* dell'attività rischiosa che possono domandare risulta essere

$$\widehat{qN} = \lambda E = \lambda[qN - D], \quad (3)$$

e dunque la *quantità* domandata sarà

$$\widehat{N} = \lambda\left[N - \frac{D}{q}\right]. \quad (4)$$

Si vede facilmente che questa curva di domanda è *crescente* rispetto a q .

L'equilibrio domanda complessiva=offerta richiede

$$\lambda\left[N - \frac{D}{q}\right] + G(q) = A, \quad (5)$$

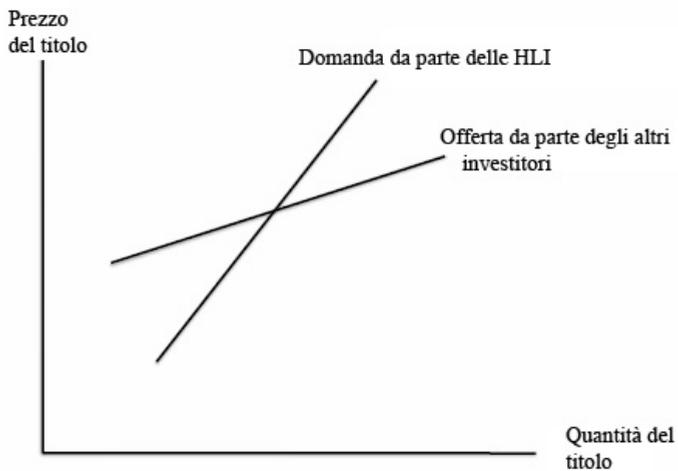
da cui

$$\lambda\left[N - \frac{D}{q}\right] = A - G(q). \quad (6)$$

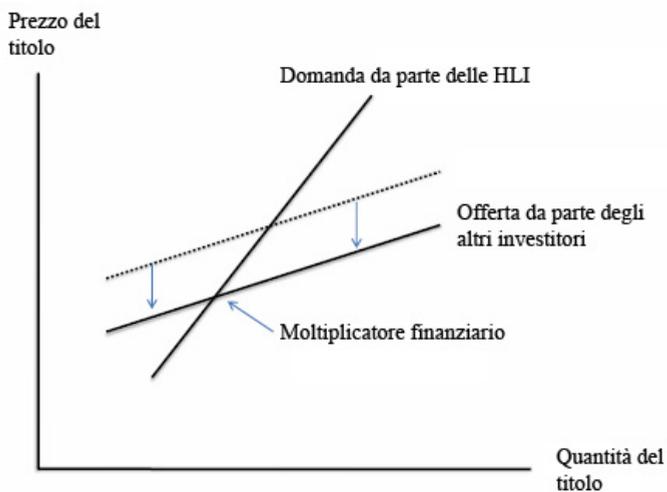
Il membro di sinistra rappresenta la domanda dell'attività finanziaria rischiosa da parte delle HLI, mentre il membro di destra rappresenta l'offerta a loro diretta, data dalla differenza fra lo stock esistente e la domanda da parte del pubblico generico.

La figura 1 illustra l'equilibrio, che si suppone stabile (curva di domanda delle HLI più ripida della curva di offerta).

Supponiamo ora che ci sia uno shock dal lato dell'offerta, causato da uno shock dal lato della domanda da parte del pubblico generico dovuto ad esempio "alla raccapricciante esperienza da parte del pubblico generico che i prezzi delle case possono di fatto anche diminuire oltre che aumentare" (Krugman, 2008). Ciò riduce la domanda del pubblico generico e sposta la curva di offerta a destra in basso (figura 2). Ma questo effetto iniziale sul prezzo viene ingigantito attraverso un effetto moltiplicativo, in quanto prezzi decrescenti costringono le HLI a contrarre i loro bilanci, causando ulteriori riduzioni dei prezzi, ulteriori contrazioni dei bilanci e cos via seguitando. La crisi è partita.

Figura 1 – *L'equilibrio in economia chiusa*

Fonte: Krugman, *op. cit.*

Figura 2 – *Il moltiplicatore finanziario in economia chiusa*

Fonte: Krugman, *op. cit.*

3.2 Il modello in economia aperta e la trasmissione internazionale della crisi

Indicando con un asterisco il resto del mondo, abbiamo le domande dell'attività rischiosa nei due paesi da parte del pubblico generico, entrambe decrescenti

$$\widehat{G} = G(q), \widehat{G}^* = G^*(q^*). \quad (7)$$

Supponiamo poi che le HLI detengano attività rischiose in entrambi i paesi, diciamo α nel paese domestico e $(1 - \alpha)$ nel resto del mondo, per cui

$$\widehat{qN} = \alpha\lambda[qN + q^*N^* - D], \quad (8)$$

$$\widehat{q^*N^*} = (1 - \alpha)\lambda[qN + q^*N^* - D], \quad (9)$$

da cui le funzioni di domanda

$$\widehat{N} = \alpha\lambda\left[N + \frac{q^*}{q}N^* - D/q\right], \quad (10)$$

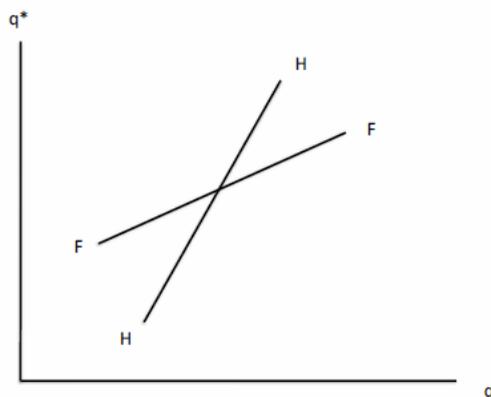
$$\widehat{N}^* = (1 - \alpha)\lambda\left[\frac{q}{q^*}N + N^* - D/q^*\right]. \quad (11)$$

Si vede che le attività rischiose nazionali ed estere diventano complementari: un aumento di q , facendo aumentare il capitale delle HLI, aumenta la domanda delle attività estere e similmente un aumento di q^* fa aumentare la domanda delle attività nazionali.

Ne segue un diagramma (figura 3) molto simile a quello del moltiplicatore in mercato aperto con ripercussioni, solo che invece del reddito nazionale dei due paesi troviamo il prezzo delle attività finanziarie nei due paesi stessi.

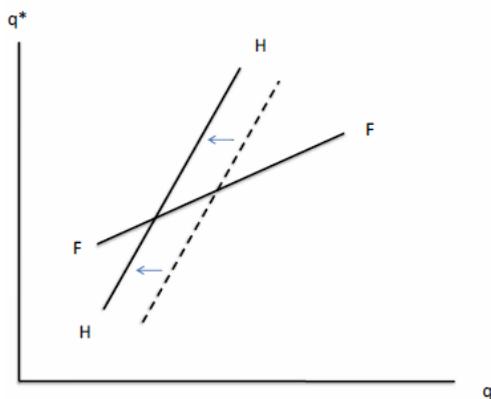
Esaminiamo ora gli effetti di uno shock negativo nel paese nazionale (figura 4). Ciò sposta la HH a sinistra e conduce a una caduta dei prezzi delle attività finanziarie in entrambi i paesi. Il canale di trasmissione è costituito dai bilanci delle HLI.

Figura 3 – Il moltiplicatore finanziario internazionale



Fonte: Krugman, *op. cit.*

Figura 4 – Propagazione internazionale della crisi



Fonte: Krugman, *op. cit.*

Secondo Krugman, da questo modello discendono due importanti implicazioni di politica economica:

1) il problema centrale è il capitale, non la liquidità. Non serve rendere liquide le attività finanziarie, occorre un'iniezione di capitale.

2) la stretta interdipendenza finanziaria richiede uno stretto coordinamento della politiche economiche.

4. Conclusione

La crisi, dunque, era prevedibile e fu prevista dagli studiosi più avveduti e privi di paraocchi.

BIBLIOGRAFIA

- BERNANKE B.S. (2004), "The Great Moderation" (Remarks by Governor Ben S. Bernanke at the meetings of the Eastern Economic Association, Washington, DC, February 20, 2004).
- DONNELLY C. and EMBRECHTS P. (2009), "The Devil in the Tails: Actual Mathematics and the Subprime Mortgage Crisis", RiskLab, ETH Zürich (in corso di pubblicazione su *ASTIN Bulletin*).
- FONTANA G. and SETTERFIELD M. (2009), "Macroeconomics, Endogenous Money and Contemporary Financial Crisis: A Teaching Model", *Int. J. Pluralism and Economics Education*, Vol. 1, Nos. 1/2, 130-147.
- GANDOLFO G. (2009), *Economic Dynamics, 4th edition*, Cap. 22, Berlin and New York, Springer.
- KRUGMAN P. (1999), *The Return of Depression Economics*, New York, Norton; trad. it *Il ritorno dell'economia della depressione*, Milano, Garzanti libri, 2001.
- KRUGMAN P. (2008), "The International Finance Multiplier", in [http:// www. princeton. edu/~ pkrugman/finmult.pdf](http://www.princeton.edu/~pkrugman/finmult.pdf).
- KRUGMAN P. (2009), *The Return of Depression Economics and the Crisis of 2008*, New York, Norton; trad. it. *Il ritorno dell'economia della depressione e la crisi del 2008*, Milano, Garzanti libri, 2009.
- LI D.X. (2000), "On Default Correlation: A Copula Function Approach" , *The Journal of Fixed Income*, Winter 2000, Vol. 17, No. 3, pp. 38-56.
- MARTIN C. and MILAS C. (2009), " Causes of the Financial Crisis: An Assessment Using UK Data" , Rimini Center for Economic Analysis, WP 10-09.
- LUCAS R.E. Jr. (2003), "Macroeconomic Priorities", *American Economic Review*, Vol. 93, No. 1, March, pp. 1-14.
- SALMON F. (2009), "The Formula that Killed Wall Street", *Wired Magazine*. marzo 2009 (www.wired.com); trad. it "La formula del crac", *Wired Italia Magazine* (www.wired.it).

Appendice matematica

Per esaminare la stabilità del punto di equilibrio di cui alla figura 1, si ipotizzi il tradizionale meccanismo di aggiustamento dinamico agli squilibri secondo cui il prezzo aumenta se la domanda eccede l'offerta, mentre diminuisce nel caso opposto. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= H \left\{ \left[\lambda \left(N - \frac{D}{q} \right) + G(q) \right] - A \right\} \\ &= H \left\{ \left[\lambda \left(N - \frac{D}{q} \right) \right] - [A - G(q)] \right\},\end{aligned}$$

ove H è una funzione che mantiene il segno, ovvero $H \geq 0$ a seconda che $[\lambda(N - \frac{D}{q})] - [A - G(q)] \geq 0$, e $H = 0$ se $[\lambda(N - \frac{D}{q})] - [A - G(q)] = 0$. Supposto che il punto di equilibrio q_e sia unico, esaminiamone la stabilità globale mediante il secondo metodo di Liapunov (Gandolfo, 2009, Cap. 22). Come funzione Liapunov scegliamo

$$V = \frac{1}{2}(q - q_e)^2,$$

da cui

$$\frac{dV}{dt} = (q - q_e) \frac{dq}{dt}$$

e quindi

$$\frac{dV}{dt} = (q - q_e) H \left\{ \left[\lambda \left(N - \frac{D}{q} \right) \right] - [A - G(q)] \right\}.$$

Si ha stabilità globale quando $dV/dt = 0$ per $q = q_e$ e $dV/dt < 0$ per $q \neq q_e$.

La condizione $\frac{dV}{dt} = 0$ per $q = q_e$ è evidentemente soddisfatta.

Occorre ora controllare la condizione sotto cui $\frac{dV}{dt}$ è sempre negativa fuori dall'equilibrio. Ciò richiede che $(q - q_e)$ e H abbiano segno opposto e cioè, date le proprietà di H , che $[\lambda(N - \frac{D}{q})] - [A - G(q)]$ e $(q - q_e)$ abbiano segno opposto al di fuori dell'equilibrio. Ciò equivale a dire che quando $q < q_e$, e quindi $(q - q_e) < 0$, deve essere $[\lambda(N - \frac{D}{q})] - [A - G(q)] > 0$, e quindi $[\lambda(N - \frac{D}{q})] > [A - G(q)]$, ovverossia la domanda delle HLI deve essere maggiore dell'offerta loro diretta, mentre quando $q > q_e$ deve valere l'opposto. Ciò è evidentemente verificato nella figura 1, ove le funzioni di domanda ed offerta sono state tracciate lineari (ma la dimostrazione vale anche per le funzioni non lineari che abbiano le proprietà date).